פרק 8 – שאלות בכבידה

שאלה 1\פרק 8

לוויין חג מסביב לכדור הארץ במסלול מעגלי שרדיוסו $7{,}100\,km$.

ידוע שהמרחק הממוצע של הירח מכדה"א הוא $384{,}000\,km$ ושזמן המחזור שלו סביב כדה"א הוא 27.3 יממות. על סמך נתונים אלה חשב את:

א. זמן המחזור של הלוויין בסיבובו סביב כדור הארץ.

ב. מסת כדור הארץ.

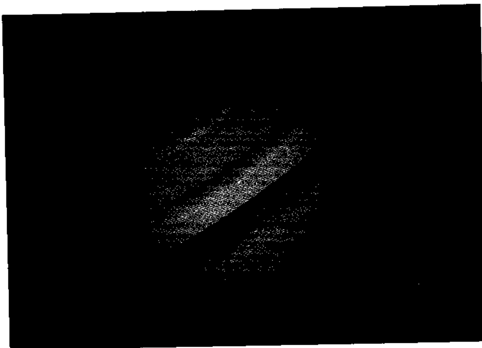
ג. מהירותו הקווית של הלוויין בתנועתו סביב כדור הארץ.

המדענים מכניסים למסלול סביב לירח לוויין שנע במסלול מעגלי שרדיוסו $7100\,km$. הם מגלים שזמן המחזור של לוויין זה גדול פי 9 מזמן המחזור של הלוויין הנ"ל החג סביב כדה"א.

ד. חשב את היחס בין מסת כדור הארץ ומסת הירח.

ה. חשב את מהירותו הקווית של הלוויין החג סביב הירח.

שאלה 2\פרק 8



כוכב הלכת שבתאי הוא הששי מבין שמונת כוכבי הלכת המקיפים את השמש. מרחקו מהשמש גדול פי 9.5 ממרחק כדה"א ממנה.

א. חשב את אורך השנה על כוכב שבתאי (כלומר, את זמן המחזור של סיבובו סביב השמש).

ב. ידוע שמסת שבתאי היא בקירוב $5.69\times10^{26}\,kg$, שרדיוסו $60{,}000\,km$ ושאורך היממה שלו (זמן המחזור של הסיבוב סביב צירו) הוא 10 שעות ו-40 דקות.

(1) חשב את תאוצת הכובד על פני שבתאי (בהזנחת השפעת הסיבוב שלו סביב עצמו).

(2) חשב את תאוצת הכובד לאורך קו המשווה על פני שבתאי, תוך התחשבות בסיבוב שלו סביב עצמו.

ידוע שהכוכב שבתאי מוקף בטבעות הסובבות סביבו (ראה תמונה). טבעות אלה משתרעות ממרחק $6{,}630\,km$ עד למרחק $120{,}700\,km$ מפני שבתאי. על סמך התצפיות מתברר שמהירות הטבעת בחלק הפנימי שלה (הקרוב לפני כוכב הלכת) גדולה ממהירותה בחלק החיצוני (הרחוק).

ג. הסבר, על סמך התצפיות, מדוע הטבעת לא יכולה להיות גוף יחיד, מוצק, אלא חייבת להיות מורכבת מחלקיקים הנעים מסביב לשבתאי בהשפעת כוח הכובד.

ד. חשב את היחס בין זמני המחזור של החלקיקים המסתובבים בחלק החיצוני של הטבעת ובין אלה של החלקיקים המסתובבים בחלק הפנימי שלה. הזנח את ההשפעה ההדדית בין החלקיקים

בטבעת.

ה. חשב את היחס בין המהירות הקווית הממוצעת של החלקיקים המסתובבים בחלק החיצוני של הטבעת ובין זו של החלקיקים המסתובבים בחלק הפנימי שלה. הזנח את ההשפעה ההדדית בין החלקיקים בטבעת.

שאלה 3\פרק 8

בטבלה שלפניך מוצגים זמני המחזור ורדיוסי המסלול של אחדים מהירחים החגים סביב כוכב הלכת שבתאי.

שם הירח	r- המרחק ממרכז שבתאי $(\mathbf{km})$	T- זמן המחזור $(\mathbf{days})$
Mimas	185,404	0.942422
Pallene	212,280	1.153750
Tethys	294,619	1.887802
Dione	377,396	2.736915

א. הראה שארבעה ירחים אלה מקיימים את החוק השלישי של קפלר.

ב. הכן טבלה של T^2 כפונקציה של r^3 (אין צורך לשנות יחידות).

ג. שרטט גרף המתאר את T^2 כפונקציה של r^3.

ד. פתח, על סמך חוקי הפיזיקה, ביטוי המתאר את הקשר בין T^2 ו-r^3.

ה. היעזר בגרף ששרטטת בסעיף ג' ובקשר שפיתחת בסעיף הקודם וחשב את מסת כוכב הלכת שבתאי (שים לב ליחידות).

ו. נתון שזמן המחזור של ירח נוסף של שבתאי (הנקרא Titan) הוא 15.94 יממות. חשב את המרחק שלו ממרכז שבתאי.

שאלה 4\פרק 8

גשושית שהתקרבה לכוכב הלכת שבתאי מדדה את המהירות של ארבעה מירחיו וגם את זמן המחזור שלהם בתנועתם מסביב לו. להלן תוצאות המדידות:

$T(\text{days})$	0.94242	1.15375	1.8878	2.73692
$v(\text{km/s})$	14.31	13.38	11.35	10.03

א. בטא את זמן המחזור (T) של הירח באמצעות מהירותו (v) ומסת שבתאי (M_S).

ב. על סמך הקשר שקיבלת בסעיף הקודם והטבלה הנ"ל, הכן טבלה חדשה המייצגת קשר לינארי בין הגדלים שמופיעים בה (שמור על היחידות המופיעות בטבלה הנתונה).

ג. שרטט גרף המתאר את הגדלים המופיעים בטבלה שהכנת בסעיף הקודם.

ד. חשב על סמך הגרף שקיבלת בסעיף הקודם ועל סמך הקשר שקבלת בסעיף א' את מסת שבתאי.

שאלה 5\פרק 8

אסטרונאוטים הנמצאים בתוך מעבורת חלל מכניסים את המעבורת למסלול מעגלי סביב כדור הארץ ומכבים את מנועיה. המעבורת נעה במסלול המעגלי שרדיוסו $10{,}000\text{km}$ בהשפעת כוח הכבידה של כדור הארץ בלבד.

אחד האסטרונאוטים קושר קפיץ לתקרת המעבורת ובקצה השני שלו קושר משקולת שמסתה 5kg. האסטרונאוט משחרר את המשקולת במצב שבו הקפיץ נמצא במצב רפוי ומכוון לכיוון מרכז כדור הארץ.

נתון שמסת כדור הארץ היא $6\times10^{24}\text{kg}$, שמסת מעבורת החלל $5{,}000\text{kg}$ ושקבוע הקפיץ הוא 100N/m.

א. חשב את:

(1) גודל וכיוון תאוצת המעבורת בתנועתה המעגלית מסביב לכדור הארץ.

(2) גודל וכיוון תאוצת הנפילה החופשית במסלול המעבורת.

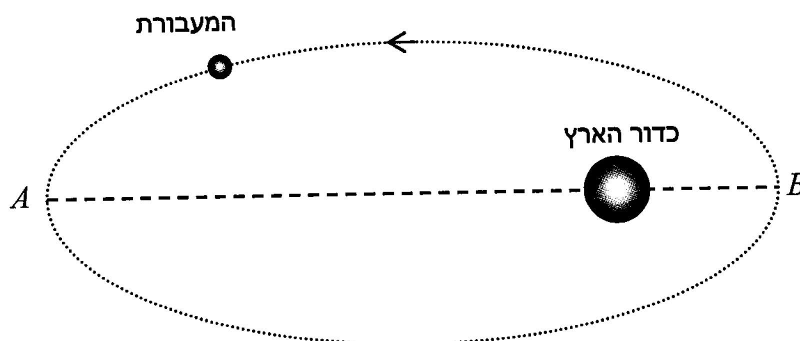
(3) כוח הכבידה הפועל על המעבורת.

(4) התארכות הקפיץ.

על מנת שהמעבורת תעבור למסלול אחר שרדיוסו גדול יותר, האסטרונאוטים מפעילים את המנועים שלה וכתוצאה מכך היא מתחילה לנוע במהירות קבועה בכיוון המשיק למסלול המעגלי.

ב. חשב את ההתארכות של הקפיץ עכשיו.

לאחר שהמעבורת מגיעה למסלול החדש, האסטרונאוטים מכבים את המנועים מחדש, והיא מתחילה לנוע מחדש מסביב לכדור הארץ בהשפעת כוח הכבידה. האסטרונאוטים מגלים כי המסלול החדש של המעבורת הוא אליפטי, כפי שמתואר בתרשים שלפניך.

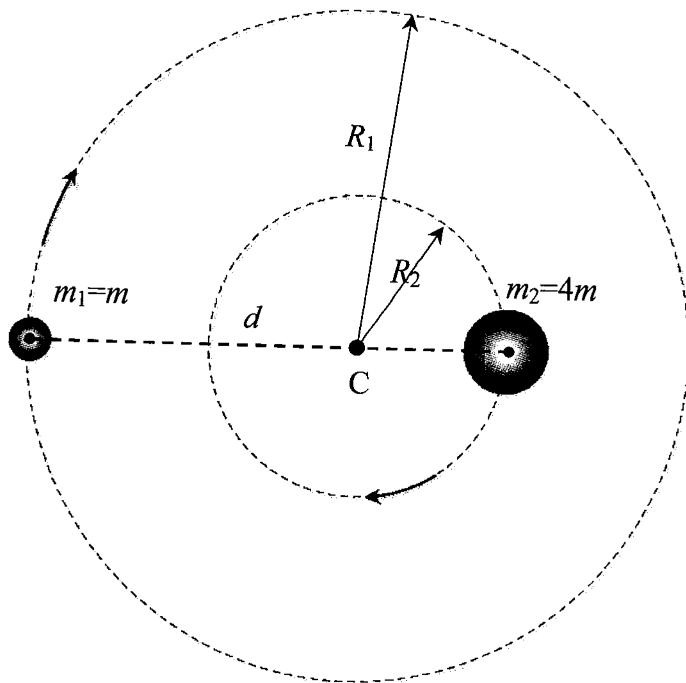


ג. התייחס למסלול המעבורת וקבע האם מהירות המעבורת גדולה יותר בנקודה A או בנקודה B? הסבר את קביעתך.

ד. קבע אם תאוצת המעבורת בנקודה A גדולה, שווה או קטנה מתאוצתה בנקודה B. הסבר את קביעתך.

ה. קבע אם התארכות הקפיץ בנקודה A גדולה, שווה או קטנה מהתארכותו בנקודה B. הסבר את קביעתך.

שאלה 6\פרק 8



מערכת כוכבים זוגית היא מערכת המורכבת משני כוכבים אשר מסתובבים מסביב למרכז המסה שלהם. אם המסות של שני הכוכבים זהות, מרכז המסה הוא נקודת האמצע של הקו המחבר בין מרכזי שני הכוכבים. לעומת זאת, אם נתונים שני כוכבים שיש להם מסות שונות, m_1 ו- m_2, אזי מרחק מרכז המסה ממרכז הכוכב הראשון נתון על ידי: $x=\dfrac{dm_2}{m_1+m_2}$, כאשר d הוא המרחק בין מרכזי שני הכוכבים.

בתרשים שלפניך מוצגים שני כוכבים הממסתובבים סביב נקודת מרכז המסה שלהם (הנקודה C בתרשים). מסת הכוכב הראשון היא $m_1=m$ ומסת הכוכב השני היא $m_2=4m$. במהלך תנועתם, מרכז הכוכב m_1, מרכז הכוכב m_2 ומרכז המסה, C, נמצאים כל הזמן על קו ישר אחד.

א. מצא את רדיוס המסלול של כל אחד משני הכוכבים. הבע את תשובתך באמצעות הגודל d.
ב. האם זמני המחזור של שני הכוכבים זהים או שונים? אם השבת זהים הסבר את תשובתך, אחרת קבע למי מבין שני הכוכבים יש זמן מחזור גדול יותר.
ג. מצא את זמן המחזור של כל אחד משני הכוכבים. בטא את תשובתך באמצעות הגדלים m ו- d.
ד. מצא את המהירות הקווית של כל אחד משני הכוכבים. בטא את תשובתך באמצעות הגדלים m ו- d.
ה. גוף נע לאורך הקו המחבר בין שני הכוכבים. קבע באיזו נקודה על קו זה הכוח השקול הפועל על הגוף מתאפס. בטא את תשובתך באמצעות d.

שאלה 7\פרק 8

חללית מתקרבת לירח. בהתחלה היא נעצרת לפרק זמן מסוים במצב שבו היא נמצאת במנוחה ביחס למרכז הירח במרחק של 600km מפני הירח, ולאחר מכן היא נכנסת למסלול מעגלי מסביב לירח בגובה 600km מפניו. ידוע שרדיוס הירח הוא $1{,}740\text{km}$.

א. האם לאחר שהחללית נעצרה במנוחה ביחס למרכז הירח בגובה 600 ק"מ מעל פניו, היא יכולה להישאר במנוחה במקום זה ללא הפעלת מנועים? הסבר את תשובתך.
ב. האם בשלב השני שבו החללית חגה סביב לירח במסלול מעגלי היה צורך להפעיל את מנועי

החללית? הסבר את תשובתך.

ג. האסטרונאוטים הנמצאים בחללית מדדו את זמן המחזור של התנועה המעגלית של החללית מסביב לירח ומצאו שהוא שעתיים ו-49.5 דקות. חשב את מסת הירח.

ד. חשב את היחס בין משקל האסטרונאוטים בחללית ובין משקלם כשהם נמצאים במנוחה על פני הירח בשני המקרים הבאים:

(1) בשלב הראשון, כשהחללית הייתה במנוחה ביחס למרכז הירח בגובה 600km מפניו.

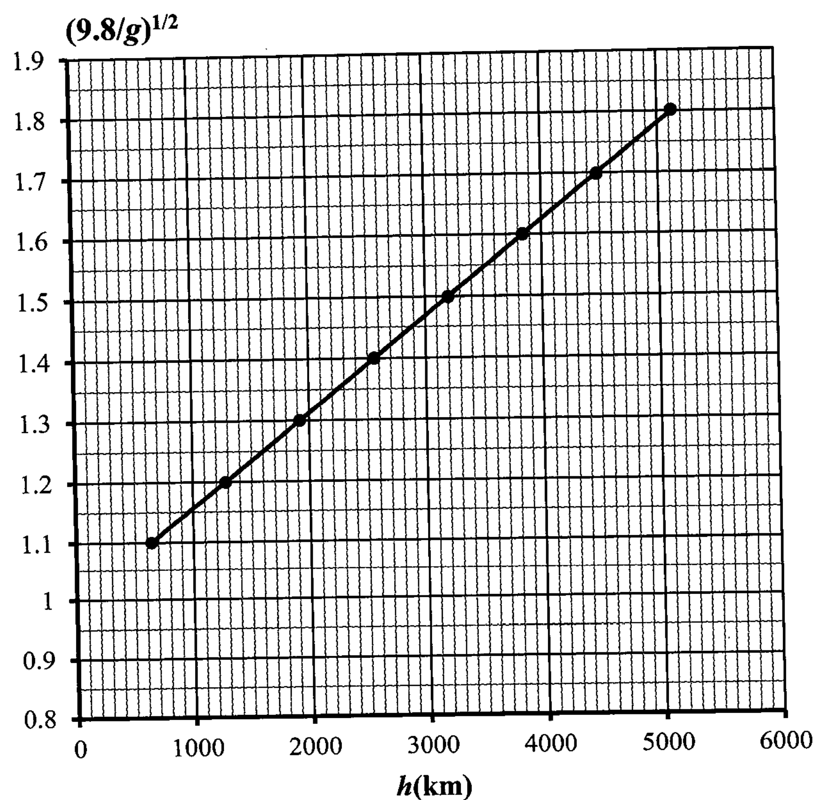
(2) בשלב השני, כשהחללית הייתה בתנועה במסלול מעגלי מסביב לירח בהשפעת כוח הכובד של הירח.

שאלה 8\פרק 8

באחד הפרויקטים של סוכנות החלל האמריקאית, נאסא, מדדו החוקרים את תאוצת הכובד של כדור הארץ, g, כפונקציה של הגובה מפני כדור הארץ, h. תוצאות המדידות שהתקבלו מוצגות בטבלה שלפניך:

$h(\text{km})$	640	1280	1920	2560	3200	3840	4480	5120
$g(\text{m/s}^2)$	8.12	6.81	5.80	5.00	4.36	3.83	3.40	3.02

על סמך התוצאות שבטבלה, שרטטו החוקרים גרף המתאר את הגודל $\sqrt{g_0/g}$ כפונקציה של הגובה h, כאשר g_0 מייצג את תאוצת הכובד על פני כדור הארץ $(h=0)$ שהיא 9.8m/s^2 (ראה גרף).



א. הוכח שניתן לבטא את תאוצת הכובד של כדה"א (g) כפונקציה של המרחק (r) ממרכז כדה"א באמצעות הביטוי:

$$g(r)=\frac{GM_{Earth}}{r^2}=9.8\left(\frac{R_E}{r}\right)^2$$

כאשר M_E היא מסת כדור הארץ ו-R_E הוא רדיוסו.

ב. הראה שניתן להגיע מהביטוי שבסעיף הקודם לקשר הבא המתאר את הגרף הנ"ל:

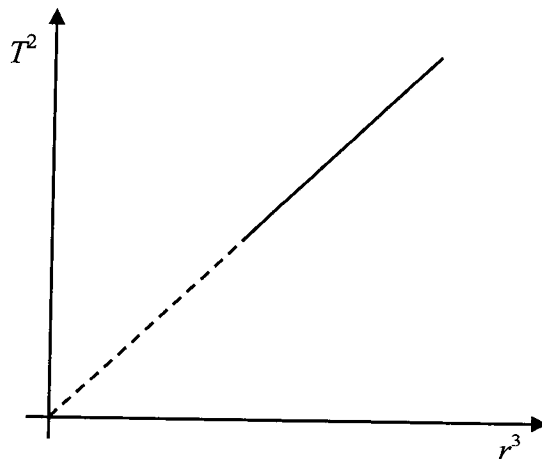
$$\sqrt{\frac{9.8}{g}}=\frac{1}{R_E}h+1$$

ג. היעזר בגרף הנתון ובקשר שבסעיף הקודם וחשב את רדיוס כדור הארץ, R_E.

ד. הסתמך על הנתון כי תאוצת הכובד על פני כדור הארץ היא $9.8\,m/s^2$ ועל רדיוס כדור הארץ שחישבת בסעיף הקודם וחשב את מסת כדה"א.

שאלה 9\פרק 8

מסביב לכל אחד מכוכבי הלכת צדק, שבתאי ואוראנוס חגים מספר ירחים. קבוצת תלמידים ערכו מחקר שנושאו ירחים אלה. הם אספו נתונים על הירחים, ועבור כל אחד משלושת כוכבי הלכת הם שרטטו גרף המתאר את ריבוע זמן המחזור של ירחיו, T^2, כנגד החזקה השלישית של מרחק הירחים ממרכז כוכב הלכת, r^3. בשלושת המקרים התלמידים קיבלו גרפים מהצורה הבאה:



א. הסבר מדוע הקשר בין r^3 ובין T^2 בשלושת המקרים הוא קשר לינארי.

ב. קבע למי מבין שלושת הגרפים ששרטטו התלמידים יש את השיפוע הקטן ביותר? הסבר את קביעתך.

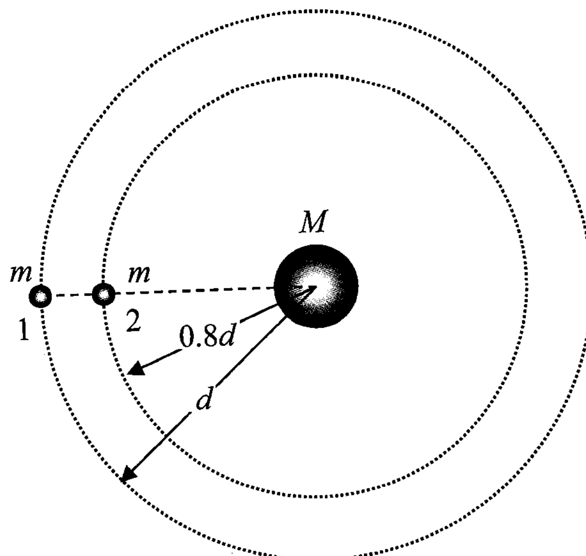
ג. ידוע שמסת צדק גדולה ממסת שבתאי פי $3\frac{1}{3}$. חשב את היחס בין שיפוע הגרף המייצג את ירחי שבתאי ובין שיפוע הגרף המייצג את ירחי צדק.

ד. (*) נתון שצפיפות המסה של כוכב הלכת צדק היא $1.326\,gr/cm^3$, של שבתאי היא $0.687\,gr/cm^3$ ושל אורנוס $1.29\,gr/cm^3$. חשב את זמן המחזור הקטן ביותר האפשרי ללוויין

המסתובב סביב כל אחד מכוכבי לכת אלה (בהנחה שהחיכוך עם האטמוספרה של כוכב הלכת זניח). פרט את חישוביך.

שאלה 10\פרק 8

בתרשים המוצג לפניך מתואר כוכב דמיוני שסביבו חגים שני כוכבי לכת, 1 ו-2, במסלולים מעגליים כך שהקו המחבר ביניהם עובר, בכל רגע נתון, דרך מרכז הכוכב.



נתון שמסת הכוכב היא M, שלשני כוכבי הלכת יש מסה זהה, m כל אחד, שמרחק כוכב הלכת 1 ממרכז הכוכב הוא d ושמרחק כוכב הלכת 2 ממרכז הכוכב הוא $0.8d$.

א. הראה כי החוק השלישי של קפלר אינו יכול להתקיים עבור כוכבי הלכת במערכת זו, והסבר מהי הסיבה לכך.

ב. (1) קבע מהו כיוון הכוח השקול הפועל על כל אחד משני כוכבי הלכת בבעיה זו.

(2) קבע על מי מבין שני כוכבי הלכת פועל כוח שקול גדול יותר? הסבר את תשובתך.

ג. מצא את:

(1) מסת הכוכב (M). בטא את תשובתך באמצעות המסה m של כוכבי הלכת.

(2) זמן המחזור של שני כוכבי הלכת. בטא את תשובתך באמצעות הגדלים m ו-d.

ד. במערכת השמש קורה לפעמים ששני כוכבי לכת נמצאים על אותו קו ישר העובר במרכז השמש. הסבר מדוע בכל זאת מתקיים בה החוק השלישי של קפלר.

שאלה 11\פרק 8

ידוע שהמרחק הממוצע של הירח ממרכז כדור הארץ הוא $384,000\text{km}$, ושזמן המחזור שלו בתנועתו סביב כדור הארץ הוא 27.3day. מסת הירח היא $7.35\times10^{22}\text{ kg}$.

א. חשב על סמך הנתונים הנ"ל בלבד את:

(1) כוח המשיכה שכדור הארץ מפעיל על הירח.

(2) מסת כדור הארץ.

סביב כדור הארץ חגים מספר לוויינים במסלולים מעגליים (בקירוב). בטבלה שלפניך מוצגים רדיוסי הסיבוב של שלושה לוויינים:

הלוויין	רדיוס המסלול (km)	זמן המחזור (ימים)
1	20,000	
2	10,000	
3	5,000	

ב. חשב, על סמך הנתונים שבפתיח השאלה בלבד, את:
(1) זמני המחזור של לוויינים אלה.
(2) רדיוס המסלול של לוויין רביעי אשר חג בדיוק מעל קו המשווה של כדה"א ונשאר כל הזמן במהלך תנועתו מעל אותה נקודה על פני כדור הארץ.

ג. חללית נעה מכדור הארץ לכיוון הירח לאורך הקו המחבר בין מרכז כדור הארץ ומרכז הירח. מצא את מיקום הנקודה על קו זה בה הכוח שכדה"א מפעיל על החללית שווה בגודלו לכוח שמפעיל עליה הירח.

שאלה 12\פרק 8

גשושית נשלחה לעבר מאדים, וכשהתקרבה ליעד היא כיבתה מנועים ונכנסה למסלול מעגלי מסביב לו בגובה 1000km מעל פניו. מדענים שעוקבים אחרי הגשושית מכדור הארץ מצאו שזמן המחזור שלה במסלול המעגלי מסביב למאדים הוא שתי שעות ו-27 דקות. ידוע שרדיוסו של מאדים הוא 3,400km.

א. חשב את מסת מאדים.
ב. חשב את תאוצת הכובד על פני מאדים.
ג. חשב את מהירות הגשושית בתנועתה סביב מאדים. בטא את תשובתך ביחידות km/s.
ד. חשב את תאוצת הגשושית בתנועתה המעגלית וחשב את תאוצת הנפילה החופשית בגובה מסלול הגשושית סביב מאדים.
ה. מחוץ לגשושית קיים מתקן הקשור לחללית בכבל ונע אתה בתנועתה המעגלית. במהלך תנועת הגשושית מתנתק הכבל. תאר את תנועת המתקן לאחר התנתקותו מהגשושית.

שאלה 13\פרק 8

מסביב לכוכב הלכת אוראנוס חגים ארבעה ירחים והם: Miranda, Ariel, Titania ו- Oberon.
נתון שרדיוס המסלול של Oberon הוא 583,420km וזמן המחזור שלו סביב אורנוס הוא 13.43day.

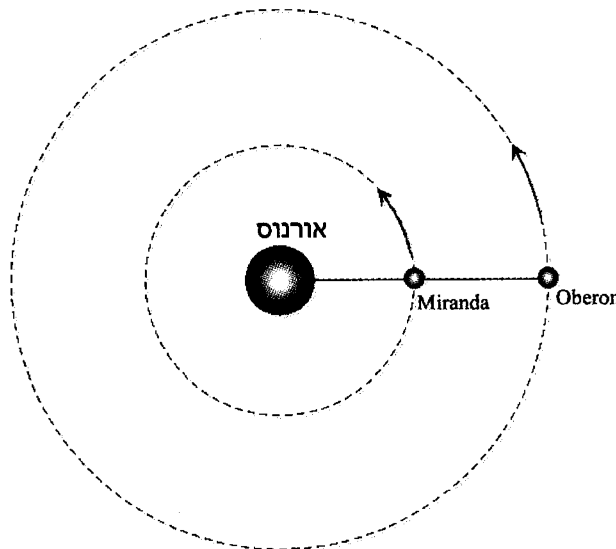
א. השלם את הטבלה הבאה:

הירח	רדיוס המסלול (km)	זמן מחזור (day)
Miranda	129,850	
Ariel	190,930	
Titania	436,270	
Oberon	583,420	13.43

ב. חשב את המסה של אורנוס.

ג. קבע מי מבין ארבעת הירחים חג במסלולו סביב אורנוס במהירות הקווית הגבוהה ביותר. חשב מהירות זו

ד. (*) נתון שברגע מסוים הירחים Oberon ו- Miranda נמצאים על קו ישר שעובר דרך מרכז אורנוס (ראה תרשים). חשב לאחר כמה זמן הם חוזרים להיות שוב על קו ישר העובר דרך מרכז אורנוס.



שאלה 14\פרק 8

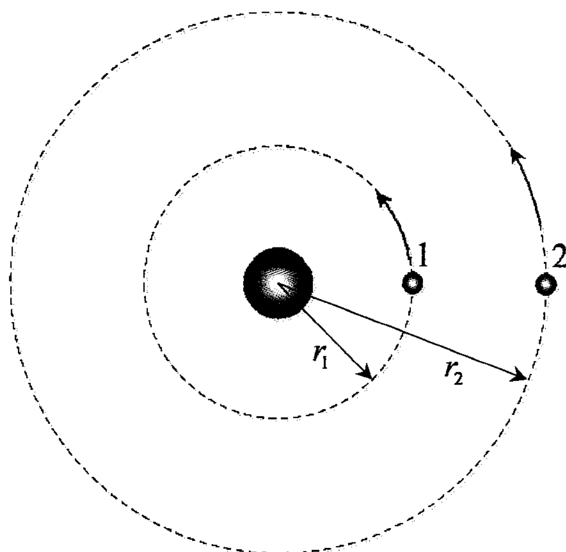
א. פתח הביטוי המתאר את תאוצת הנפילה החופשית בשדה הכובד של כוכב לכת כפונקציה של מסת הכוכב M והמרחק ממרכזו r, עבור $r > R$, כאשר R הוא רדיוס כוכב הלכת.

ב. היעזר בביטוי שפיתחת בסעיף הקודם והראה שניתן לבטא את $g(r)$, תאוצת הנפילה החופשית במרחק r ממרכז כוכב לכת (עבור $r > R$), באמצעות הביטוי: $g(r) = g_0(R/r)^2$, כאשר R הוא רדיוס כוכב הלכת ו- g_0 היא תאוצת הנפילה החופשי על פני כוכב הלכת.

ג. חשב באיזה גובה מפני כדור הארץ תאוצת הכובד יורדת ל- $0.16g_0$. נתון $R_E = 6{,}380\text{km}$.

ד. חשב באיזה גובה מעל פני כדור הארץ משתווה תאוצת הנפילה החופשית לתאוצת הנפילה החופשית על פני הירח. נתון שרדיום הירח $1{,}740\text{km}$, רדיוס כדור הארץ $6{,}380\text{km}$ והיחס בין מסת כדור הארץ למסת הירח הוא 81 בקירוב.

שאלה 15\פרק 8



שני לוויינים שיש להם מסה זהה, m כל אחד, חגים סביב כדור הארץ בשני מסלולים מעגליים הנמצאים באותו מישור. רדיוס המסלול של הלוויין הראשון הוא r_1 ורדיוס המסלול של הלוויין השני הוא r_2, כפי שמתואר בתרשים לפניך.

א. מצא את היחס בין המהירויות של שני הלוויינים, v_2 / v_1. בטא את תשובתך באמצעות r_2 ו- r_1.

ב. מצא את היחס בין זמני המחזור של שני הלוויינים, T_2 / T_1. בטא את תשובתך באמצעות r_2 ו- r_1.

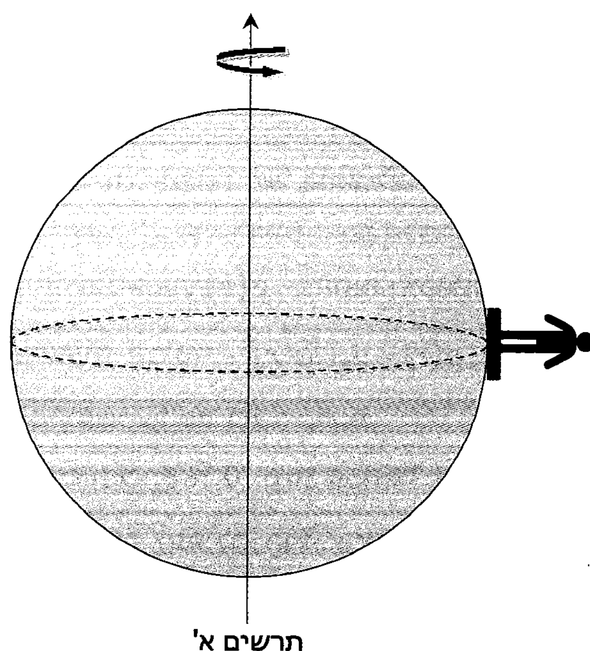
ג. מצא את היחס בין הכוחות השקולים הפועלים על שני הלוויינים, $\Sigma F_2 / \Sigma F_1$. בטא את תשובתך באמצעות r_2 ו- r_1.

ד. נניח שברגע מסוים שני הלוויינים היו על קו ישר שעובר דרך מרכז כדור הארץ. חשב כעבור כמה זמן הם חוזרים להיות על אותו קו שעובר דרך מרכז כדור הארץ. בטא את תשובתך באמצעות הגדלים: r_1, r_2 וזמן המחזור T_2 של הלוויין 2.

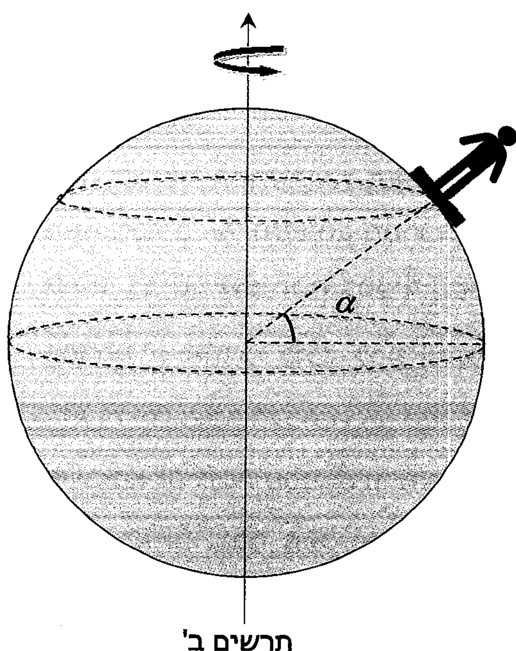
שאלה 16\פרק 8

אסטרונאוט הנמצא על קו המשווה על פני כוכב לכת דמיוני עומד על מאזניים כפי שמתואר בתרשים א'.

נתון: זמן המחזור של כוכב הלכת בתנועתו הסיבובית T, מסתו M, רדיוסו R ומסת האסטרונאוט m.



תרשים א'



תרשים ב'

א. הסבר את המונח "קו משווה" של כוכב לכת.

ב. מצא את קריאת המאזניים (משקל האסטרונאוט). בטא את תשובתך באמצעות הגדלים m, M, R ו- T.

ג. מצא את זמן המחזור הדרוש עבור כוכב הלכת, בתנועתו הסיבובית סביב צירו, על מנת שהאסטרונאוט יהיה "חסר משקל". בטא את תשובתך באמצעות הגדלים R ו- M.

ד. חזור וחשב את הזמן שחישבת בסעיף הקודם, הפעם עבור כדור הארץ. נתון $R_E = 6{,}380\,\text{km}$ ו- $M_E = 6\times10^{24}\,\text{kg}$.

כעת האסטרונאוט נמצא על מאזניים המונחים על פני כוכב הלכת בקו רוחב α, כפי שמתואר בתרשים ב'.

ה. (**) מצא את קריאת המאזניים (משקל האסטרונאוט). בטא את תשובתך באמצעות הגדלים m, M, R, α ו- T.

ו. קבע באיזה מיקום על פני כוכב הלכת קריאת המאזניים שווה לכוח הכובד הפועל על האסטרונאוט. הסבר תשובתך.

שאלה 17\פרק 8

בשנת 1772 הגיע האסטרונום יוהאן בוד (Johann Bode) לחוק שנקרא היום (Titius – Bode law). טיטיוס היה הראשון שהגה הרעיון לחוק הזה בשנת 1717.

חוק טיטיוס-בוד הוא הקשר המתמטי הבא, המאפשר לחשוב את מרחקי כוכב הלכת מהשמש: $r = 0.4 + 0.3(2)^n$, כאשר n הוא מספר שלם שמתחיל מ-0 עבור כוכב הלכת נוגה. היחידות בחוק זה הן AU כאשר $1\text{AU} = 150{,}000{,}000\,\text{km}$ הוא המרחק הממוצע בין כדור הארץ והשמש.

א. השלם את הטבלה שלפניך בהתאם לחוק טיטוס-בודה.

n	0	1	2	3	4	5	6
r(AU)							

ב. העזר בדף הנוסחאות (המצורף לבחינות הבגרות) או במקור אמין אחר והשלם את הטבלה שלפניך:

כוכב הלכת	המרחק המשמש (AU)	n
נוגה		
כדור הארץ		
מאדים		
צדק		
שבתאי		
אורנוס		

ג. מהשוואה בין שתי הטבלאות בסעיפים א' ו-ב' מגלים שיש כוכב לכת "חסר". קבע מה צריך להיות המרחק בין השמש לכוכב לכת זה.

ד. בשנת 1801 התגלה "כוכב הלכת החסר" שהוא בעצם אסטרואיד שנקרא קרס (Ceres). חשב את זמן המחזור שלו בתנועתו סביב השמש.

שאלה 18\פרק 8



האסטרואידים הם גושי אבן המסתובבים מסביב לשמש בהשפעת כוח הכבידה. ממדי אבנים אלה שונים ויכולים לנוע מממדים קטנים מאוד עד לעשרות קילומטרים. בין מאדים לצדק, קיימת חגורה של מאות אלפי אסטרואידים החגים סביב השמש במסלולים רבים. הרדיוס הפנימי של חגורה זו (המסלול הקרוב לשמש) הוא $3\times10^{8}\,\text{km}$ וחיצוני הוא $5\times10^{8}\,\text{km}$. ידוע שמרחק כדור הארץ מהשמש הוא $1.5\times10^{8}\,\text{km}$ ושזמן המחזור שלו בתנועתו סביב לשמש הוא שנה אחת.

א. על סמך הנתונים בפתיח השאלה חשב את:

(1) זמן המחזור של האסטרואידים במסלול הקרוב לשמש.

(2) זמן המחזור של האסטרואידים במסלול הרחוק מהשמש.

ב. האם האסטרואידים יכולים, במהלך תנועתם בחגורת האסטרואידים, להתנגש זה בזה? הסבר את תשובתך.

ג. מסת אחד האסטרואידים הנמצא בקצה הרחוק של חגורת האסטרואידים היא $0.6\times10^{21}\,\text{kg}$. חשב את היחס בין כוח המשיכה שמופעל על אסטרואיד זה על ידי השמש ובין הערך המקסימלי של כוח המשיכה המופעל עליו על ידי כוכב הלכת צדק. נתון שמרחק צדק מהשמש הוא $7.78\times10^{11}\,\text{km}$.

ד. על סמך תשובתך לסעיף הקודם קבע האם מתקיימים חוקי קפלר עבור האסטרואיד שמוזכר שם? הסבר את תשובתך.

שאלה 19\פרק 8

סביב מאדים חגים שני ירחים. האחד נקרא פובוס (Phobos) והשני דימוס (Deimos). נתון שמרחק פובוס ממרכז מאדים הוא $r_1=9300\,\text{km}$, שזמן המחזור שלו בתנועתו מסביב למאדים הוא 7.5 שעות ושזמן המחזור של דימוס הוא 30 שעות.

א. חשב את מרחק דימוס ממרכז מאדים.

ב. חשב את מסת מאדים.

ג. חשב את תאוצת הנפילה החופשית על פני מאדים. נתון שרדיוס מאדים הוא כ- $3{,}400\,\text{km}$

ד. ידוע שזמן המחזור של מאדים בתנועתו סביב צירו הוא 24 שעות. באיזה מרחק ממרכז מאדים ובמישור קו המשווה שלו יש להכניס לוויין שנע במסלול מעגלי על מנת שיישאר כל הזמן מעל אותה נקודה על קו המשווה של מאדים.

ה. (**) משגרים לוויין נוסף שנע במסלול מעגלי סביב מאדים, מעל קו המשווה, ברדיוס מסלול ששווה לרבע המרחק שחישבת בסעיף הקודם, כך שהוא חג בכיוון מנוגד לכיוון הסיבוב של מאדים סביב צירו. חשב כל כמה זמן חוזר הלוויין מעל אותה נקודה על פני מאדים.

אנרגיה

שאלה 20\פרק 8

לוויין חג במסלול מעגלי סביב כוכב לכת. נתון: מסת כוכב הלכת M, מסת הלוויין m ורדיוס המסלול של הלוויין הוא r.

א. הבע את המהירות הקווית של הלוויין במסלולו באמצעות הגדלים M ו-r.

ב. הבע את האנרגיה הקינטית, E_K, של הלוויין באמצעות הגדלים M, m ו-r.

ג. הוכח שתנועת הלוויין במסלולו המעגלי מקיימת את הקשר $E_K=-\frac{1}{2}U_G$, כאשר U_G היא האנרגיה הפוטנציאלית הגרביטציונית של הלוויין.

ד. הוכח שהאנרגיה הכוללת של הלוויין במסלולו היא:

$$E=-\frac{GmM}{2r}=\frac{U_G}{2}$$

ה. הסבר מהי המשמעות של האנרגיה הכוללת של הלוויין, אותה חישבת בסעיף הקודם.

שאלה 21\פרק 8

אסטרואיד מתנגש התנגשות פלסטית בלוויין החג סביב כדור הארץ במסלול מעגלי שרדיוסו r_1.

נתון שמהירות האסטרואיד לפני ההתנגשות היא $1.8v_1$, כאשר v_1 היא מהירות הלוויין לפני ההתנגשות, וכיוון מהירות האסטרואיד רגע לפני ההתנגשות הוא בכיוון תנועת הלוויין.

נתון גם שהמסות של הלוויין והאסטרואיד זהות, m כל אחת.

א. מצא את המהירות המשותפת (גודל וכיוון) של הלוויין והאסטרואיד מיד אחרי ההתנגשות. בטא את תשובתך באמצעות הגדלים: M_E ו-r_1.

ב. מצא את רדיוס המסלול החדש של הלוויין, בהנחה שהוא מעגלי. בטא את תשובתך באמצעות הגודל r_1.

ג. מצא את המהירות הגדולה ביותר האפשרית עבור האסטרואיד לפני ההתנגשות על מנת שהאסטרואיד והלוויין יישארו קשורים לכדור הארץ. בטא את תשובתך באמצעות הגדלים: M_E ו-r_1.

ד. ענה על הסעיפים א' ו-ב' אם האסטרואיד נע לפני ההתנגשות הפלסטית בכיוון מנוגד לכיוון תנועת הלוויין.

שאלה 22\פרק 8

יורים פגז מפני כדור הארץ בזווית מסוימת ובמהירות התחלתית של $9km/s$. כתוצאה מכך, הפגז נכנס למסלול מעגלי סביב כדור הארץ והופך למעשה ללוויין. התנגדות האוויר ניתנת להזנחה בכל סעיפי השאלה.

א. חשב את רדיוס המסלול המעגלי של הפגז.

ב. חשב את גודל המהירות המינימלית שיש להקנות לפגז במסלולו המעגלי סביב כדור הארץ, על מנת שישתחרר משדה הכבידה של כדור הארץ.

ג. חשב את תוספת המהירות שיש להקנות לפגז במסלולו המעגלי סביב כדור הארץ על מנת להשתחרר משדה הכבידה של כדור הארץ, אם:

1) תוספת המהירות היא בכיוון מהירות הפגז.

2) תוספת המהירות היא בכיוון ניצב למהירות הפגז.

במקרה אחר יורים את הפגז במהירות של $9km/s$ בכיוון אנכי כלפי מעלה.

ד. חשב את הגובה המקסימלי אליו מגיע הפגז ביחס לפני הקרקע.

ה. חשב את המהירות המינימלית שיש להקנות לפגז על פני כדור הארץ על מנת שישתחרר משדה הכבידה של כדור הארץ (מהירות הבריחה).

שאלה 23\פרק 8

על מנת להכניס לוויין למסלול מעגלי ברדיוס של $10,000km$, סביב כדור הארץ מעמיסים את הלוויין על מעבורת חלל המשוגרת מפני כדור הארץ. בהגיעה לגובה הרצוי, המעבורת מאיצה במסלול המיועד ללוויין עד למהירות המתאימה למסלול זה ומשחררת את הלוויין, אשר ממשיך בתנועה מעגלית בהשפעת כוח הכבידה של כדור הארץ. נתון שמסת הלוויין $1000kg$.

ענה על הסעיפים הבאים בהנחה שהתנגדות האוויר זניחה.

א. חשב את מהירות המעבורת ברגע שחרור הלוויין.

ב. חשב את העבודה שהמעבורת מבצעת בהעברת הלוויין מפני כדור הארץ עד להכנסתו במסלולו מסביב לכדור הארץ.

לאחר מספר שנים מחליטים להעביר את הלוויין למסלול אחר, שרדיוסו $15,000km$. לשם כך משגרים שוב את המעבורת, והיא מתחברת ללוויין ומעבירה אותו למסלול החדש.

ג. חשב את העבודה שהמעבורת מבצעת בפעולה זו.

ד. חשב את האנרגיה הכוללת של הלוויין במסלול החדש.

ה. חשב את העבודה המינימלית שיש להשקיע על מנת לשחרר את הלוויין משדה הכבידה של כדור הארץ כשהוא במסלולו החדש.

שאלה 24\פרק 8

ידוע שמסת כדור הארץ היא $6\times10^{24}\,kg$ ורדיוסו $6{,}380\,km$, שמסת הירח $7.35\times10^{22}\,kg$ ורדיוסו $1{,}740\,km$ ושהמרחק הממוצע בין מרכז כדור הארץ ומרכז הירח הוא $384{,}000\,km$.

א. על הקו המחבר בין מרכז כדור הארץ ומרכז הירח קיימת נקודה שנסמן ב- C שבה מתקיים שהכוח השקול הפועל על גוף המונח בנקודה זו בהשפעת הירח וכדור הארץ הוא אפס. חשב את מרחק נקודה זו ממרכז כדור הארץ.

ב. רוצים לשגר פגז מפני כדור הארץ לפני הירח. חשב את המהירות המינימלית שיש להקנות לפגז על מנת שיגיע לירח. הזנח את התנגדות האוויר.

ג. חשב את מהירות הפגיעה של הפגז מהסעיף הקודם בפני הירח.

שאלה 25\פרק 8

לוויין מסתובב סביב כדור הארץ במסלול מעגלי שרדיוסו $11{,}800\,km$. הלוויין נושא מכשיר שמסתו $300\,kg$. מסת הלוויין ללא המכשיר היא $500\,kg$.

באמצעות תותח מיועד למטרה זו הלוויין משגר את המכשיר במהירות התחלתית מסוימת. כתוצאה מכך עובר המכשיר למסלול מעגלי חדש שרדיוסו $14{,}000\,km$.

א. חשב את מהירות הלוויין (כולל המכשיר) במסלול ההתחלתי.

ב. חשב את מהירות השיגור של המכשיר אם נתון שהמכשיר שוגר בכיוון תנועת הלוויין.

ג. חשב את מהירות הלוויין לאחר ששוגר ממנו המכשיר.

ד. חשב את המסלול החדש של הלוויין לאחר שיגור המכשיר, בהנחה שהמסלול החדש של הלוויין הוא מעגלי.

פתרונות שאלות פרק 8 – כבידה

פתרון שאלה 1\פרק 8

א. ניעזר בחוק השלישי של קפלר:

$$\frac{T_2^2}{r_2^3}=\frac{T_1^2}{r_1^3}$$

כאשר 1 מסמל את הירח ו-2 את הלוויין.

$$T_2=T_1\sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}}=T_1\sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3}=$$

$$=27.3\,\text{day}\sqrt{\left(\frac{7100}{384,000}\right)^3}=0.069\,\text{day}=1.65\,\text{h}$$

ב. נשתמש בחוק השני של ניוטון עבור התנועה המעגלית של הלוויין:

$$\frac{GM_{Earth}m}{r^2}=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2r$$

$$\Rightarrow M_{Earth}=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}=$$

$$=\frac{4\pi^2\left[7,100\times1000\right]^3}{6.67\times10^{-11}\left(1.65\times60\times60\right)^2}=6\times10^{24}\,\text{kg}$$

ג.

$$v=\frac{2\pi r}{T}=\frac{2\pi\left(7,100\right)\times1000}{1.65\times60\times60}=7,510\,\text{m/s}$$
$$=7.51\,\text{km/s}$$

ד. מהחוק השני של ניוטון עבור הלוויין 1 בתנועתו המעגלית סביב כדור הארץ מתקבל:

$$\frac{GM_{Earth}m}{r^2}=m\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2r$$

$$\Rightarrow M_{Earth}=\frac{4\pi^2r^3}{GT_1^2}$$

ובאותה גישה נקבל עבור לוויין 2 בתנועתו המעגלית סביב הירח:

$$\frac{GM_{Moon}m}{r^2}=m\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2r$$

$$\Rightarrow M_{Moon}=\frac{4\pi^2r^3}{GT_2^2}$$

משתי המשוואות האחרונות מתקבל:

$$\frac{M_{Earth}}{M_{Moon}}=\frac{T_2^2}{T_1^2}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2=9^2=81$$
$$\Rightarrow M_{Earth}=81M_{Moon}$$

ה. מאחר ואורך המסלול (ההיקף) לא השתנה, וזמן המחזור גדול פי 9, משמעות הדבר שמהירות הלוויין סביב הירח קטנה פי 9, לכן:

$$v_2=\frac{7,510\,\text{m/s}}{9}=834.44\,\text{m/s}$$

פתרון שאלה 2\פרק 8

א. נשתמש בחוק השלישי של קפלר:

$$\frac{T_S^2}{r_S^3}=\frac{T_E^2}{r_E^3}$$

כאשר E-Earth ו-S-Saturn.

$$\Rightarrow T_S=T_E\sqrt{\frac{r_S^3}{r_E^3}}=$$

$$=T_E\sqrt{\left(\frac{r_S}{r_E}\right)^3}=1\,\text{yr}\sqrt{(9.5)^3}=29.3\,\text{yr}$$

ב.

(1) על ידי שימוש בחוק השני של ניוטון עבור גוף שמסתו m' הנופל על פני שבתאי מתקבל:

$$g=\frac{F_g}{m'}=\frac{\frac{GM_Sm'}{R_S^2}}{m'}=\frac{GM_S}{R_S^2}=$$

$$=\frac{\left(6.67\times10^{-11}\right)\left(5.69\times10^{26}\right)}{\left(6\times10^7\right)^2}=10.54\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(2) הגופים הנופלים על פני שבתאי, נופלים ביחס למרכזו (מרכז כוכב הלכת שבתאי) בתאוצה שגודלה $10.54\,\text{m/s}^2$, שהיא תאוצת הנפילה החופשית שם. אם שבתאי לא היה מסתובב סביב עצמו, תאוצה זו הייתה

התאוצה שבה הגופים נופלים בסמוך לפני שבתאי. אבל בגלל ששבתאי (בדומה לשאר כוכבי הלכת) מסתובב גם סביב צירו, יש לכל נקודה על פניו תאוצה צינטרפיטלית (בכיוון המרכז). גודל תאוצה זו עבור הנקודות הנמצאות על קו המשווה של שבתאי הוא:

$$a_c = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{10\frac{2}{3} \times 60 \times 60\,\text{s}}\right)^2 \left(6 \times 10^7\,\text{m}\right) = 1.6\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

לכן תאוצת הגופים הנופלים בהשפעת כוח הכובד של שבתאי בסמוך לקו המשווה שלו וביחס לפני הקרקע, שווה ל:

$$g' = g - a_c = 10.54 - 1.6 = 8.94\,\text{m/s}^2$$

ג. אם הטבעת היא גוף מוצק המסתובב במהירות זווית ω, אז מהירות הסיבוב של החלק הפנימי שלה נתונה על ידי: $v_1 = \omega R_1$, כאשר $R_1 = (60{,}000 + 6{,}630)\,\text{km}$, ומהירות הסיבוב של החלק החיצוני שלה נתונה על ידי: $v_2 = \omega R_2$ כאשר: $R_2 = (60{,}000 + 120{,}700)\,\text{km}$.

מכיוון ש-$R_2 > R_1$, נקבל ש-$v_2 > v_1$ וזה סותר את הנתון בשאלה.

לעומת זאת, אם הטבעת מורכבת מחלקיקים החגים בהשפעת כוח הכובד, נקבל שעבור כל חלקיק שמסתו m הנמצא במרחק r ממרכז שבתאי מתקיים:

$$\frac{GM_S m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_S}{r}}$$

כאשר M_S היא מסת שבתאי. מקשר זה מקבלים שהמהירות הגדולה ביותר היא זו של החלקיקים הנמצאים בחלק הפנימי של הטבעת. לעומת זאת, מהירות החלקיקים הנמצאים בחלק החיצוני של הטבעת היא הקטנה ביותר, וזה תואם את התצפיות. מכך ניתן להסיק שהטבעת מורכבת מחלקיקים רבים, הנפרדים זה מזה ואינה גוף מוצק אחד.

ד. לפי החוק השלישי של קפלר מתקבל:

$$\frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{r_1^3}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{60{,}000 + 120{,}700}{60{,}000 + 6{,}630}\right)^3} = 4.47$$

ה.

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{GM/r_2}}{\sqrt{GM/r_1}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{60{,}000 + 6{,}630}{60{,}000 + 120{,}700}} = 0.6$$

פתרון שאלה 3\פרק 8

א. על מנת להוכח שירחים אלה מקיימים את החוק השלישי של קפלר, יש להראות שהיחס T^2/r^3 הוא קבוע עבור ארבעתם. על בסיס הטבלה שנתונה בשאלה מתקבלת הטבלה הבאה בה מוצג יחס זה עבור ארבעת הירחים

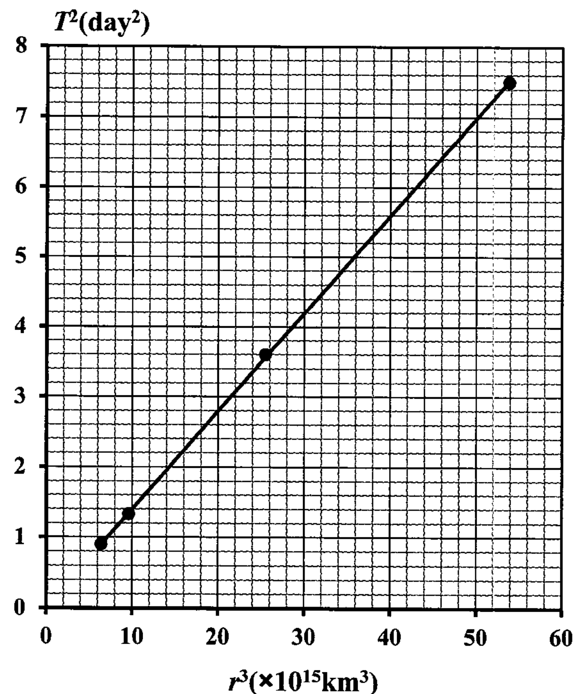
הירח	$T^2/r^3\left(\text{days}^2/\text{km}^3\right)$
Mimas	1.3935×10^{-16}
Pallene	1.3935×10^{-16}
Tethys	1.3935×10^{-16}
Dione	1.3935×10^{-16}

רואים אפוא בבירור שהירחים מקיימים את החוק השלישי של קפלר.

ב.

$T^2\left(\text{day}^2\right)$	$r^3\left(\times 10^{15}\ \text{km}^2\right)$
0.9	6.4
1.33	9.6
3.6	25.5
7.5	53.8

ג.



ד. נשתמש בחוק השני של ניוטון עבור ירח כלשהו מירחי שבתאי ונקבל:

$$\frac{GM_S m}{r^3}=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$\Rightarrow T^2=\left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right)r^3$$

כאשר M_S היא מסת שבתאי.

ה. על פי הסעיף הקודם שיפוע הגרף מבטא את הגודל $\frac{4\pi^2}{GM}$, כאשר M היא מסת שבתאי.

על מנת לחשב את מסת שבתאי יש לחשב את שיפוע הגרף, ולשם כך נבחר שתי נקודות על קו המגמה, לדוגמה: $(20\times10^{15}\ \text{km}^3, 2.8\,\text{day}^2)$ ו- $(50\times10^{15}\ \text{km}^3, 7\,\text{day}^2)$. מתקיים:

$$\frac{4\pi^2}{GM_S}=\frac{(7-2.8)(24\times3600\,\text{s})^2}{(50-20)\times10^{15}(1000\,\text{m})^3}=$$

$$=1.045\times10^{-15}\ \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$$

מכאן נקבל:

$$M_S=\frac{4\pi^2}{(6.67\times10^{-11})(1.045\times10^{-15})}=$$

$$=5.66\times10^{26}\ \text{kg}$$

ו. נשתמש ביחס שקיבלנו בסעיף א' ונקבל:

$$\frac{T^2}{r^3}=1.3935\times10^{-16}\ \frac{\text{day}^2}{\text{km}^3}$$

$$\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{T^2}{1.3935\times10^{-16}\ \text{day}^2/\text{km}^3}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{(15.94\text{day})^2}{1.3935\times10^{-16}\ \text{day}^2/\text{km}^3}}=$$

$$=1{,}221{,}677\ \text{km}$$

פתרון שאלה 4\פרק 8

א. שימוש בחוק השני של ניוטון עבור הלוויין בתנועתו המעגלית מסביב לשבתאי נותן:

$$\frac{GmM_S}{r^2}=m\frac{v^2}{r}\quad\Rightarrow(1)\quad v^2=\frac{GM_S}{r}$$

מצד שני מתקיים:

$$v=\frac{2\pi r}{T}\ \Rightarrow r=\frac{vT}{2\pi}$$

נציב קשר זה במשוואה (1) ונקבל:

$$v^2=\frac{GM_S}{vT/2\pi}$$

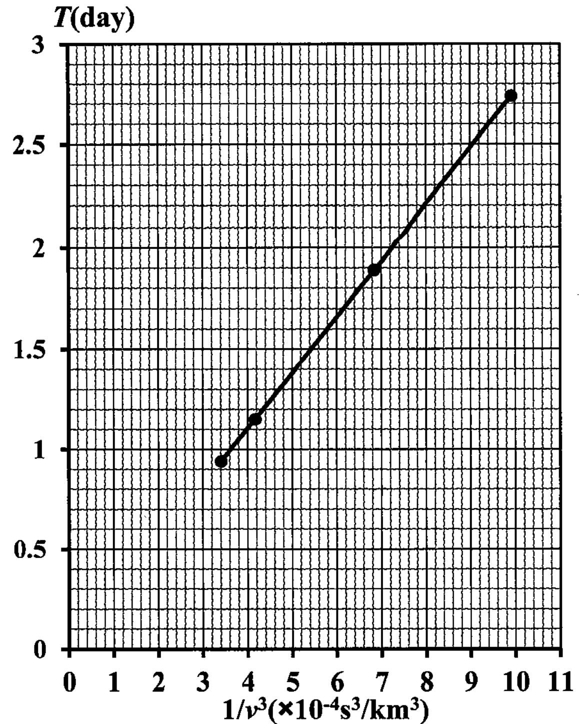
$$\Rightarrow T=\left(2\pi GM_S\right)\frac{1}{v^3}$$

ב. יש להכין טבלה של T כפונקציה של $(1/v^3)$:

$T\left(\text{days}\right)$	$1/v^3\left(\times10^{-4}\ \text{s}^3/\text{km}^3\right)$
0.94	3.41

4.17	1.15
6.84	1.89
9.92	2.74

ג.



ד. שיפוע הגרף מבטא את הגודל $2\pi GM_S$. על מנת לחשב שיפוע זה נבחר שתי נקודות על קו המגמה, לדוגמה: $(4\times10^{-4}\,\mathrm{s^3/km^3}, 1.1\,\mathrm{day})$ ו- $(8\times10^{-4}\,\mathrm{s^3/km^3}, 2.2\,\mathrm{day})$:

$$2\pi GM_S = \frac{(2.2-1.1)(24\times3600\,\mathrm{s})}{(8-4)\times10^{-4}\,\mathrm{s^3/(1000\,m)^3}}$$

$$\Rightarrow M_S = 5.66\times10^{26}\,\mathrm{kg}$$

פתרון שאלה 5\פרק 8

א.

(1) כתוצאה מתנועתה המעגלית מסביב לכדור הארץ יש למעבורת תאוצה צינטרפיטלית הנתונה על ידי: $a_c = \frac{v^2}{r}$. מהחוק השני של ניוטון מתקיים עבור המעבורת נקבל:

$$\frac{GmM_E}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{v^2}{r} = \frac{GM_E}{r^2}$$

מכאן נקבל:

$$a_c = \frac{GM_E}{r^2} =$$

$$= \frac{(6.673\times10^{-11})(6\times10^{24})}{(10^7)^2} = 4\,\mathrm{m/s^2}$$

שים לב! הגודל GM_E/r^2 הוא תאוצת הכובד במרחק r ממרכז כדור הארץ.

(2)

$$g(r) = \frac{GM_E m/r^2}{m} = \frac{GM_E}{r^2} =$$

$$= \frac{(6.673\times10^{-11})(6\times10^{24})}{(10^7)^2} = 4\,\mathrm{m/s^2}$$

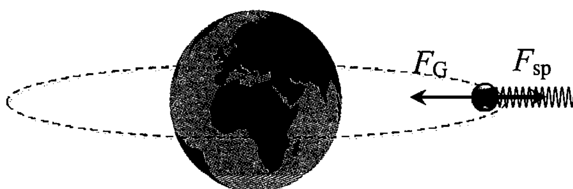
(3) $F = Mg = (5{,}000)(4) = 20{,}000\,\mathrm{N}$

(4) התארכות הקפיץ היא אפס. ניתן להסביר זאת בשתי גישות:

<u>הראשונה:</u> מכיוון שתאוצת הנפילה החופשית של הגופים בתוך המעבורת שווה לתאוצת המעבורת כלפי מרכז כדה"א בגלל תנועתה המעגלית, נקבל שתאוצת הגופים בתוך המעבורת ביחס למעבורת היא אפס, כלומר הגופים בתוך המעבורת נמצאים בחוסר משקל, והתארכות הקפיץ תהיה אפס.

<u>השנייה:</u> נרשום את הכוחות הפועלים על המשקולת m הקשורה לקפיץ. הכוחות הפועלים על המשקולת הם: $F_G = \frac{GM_E m}{r^2}$, ובהנחה שיש לקפיץ התארכות מסוימת $\Delta\ell$ יפעל על המשקולת כוח הקפיץ: $F_{sp} = k\Delta\ell$.

כוחות אלה מתוארים בתרשים הבא:



בגלל התנועה המעגלית של המשקולת ביחד

עם החללית מתקיים:

$$F_G - k\Delta\ell = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{GM_E m}{r^2} - k\Delta\ell = m\frac{v^2}{r}$$

כאשר $v^2/r = GM_E/r^2$ (ראה תת סעיף א1).

מכאן נקבל מהמשוואה האחרונה:

$$\frac{GM_E m}{r^2} - k\Delta\ell = m\left(\frac{GM_E}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow k\Delta\ell = 0 \quad \Rightarrow \Delta\ell = 0$$

ב. כעת תאוצת המעבורת (כמו גם תאוצת המשקולת שעל הקפיץ) ביחס למרכז כדור הארץ היא אפס. לכן המשקולת נמצאת במצב שווי משקל, כלומר סכום הכוחות הפועלים עליה הוא אפס. לכן מתקיים:

$$k\Delta\ell = \frac{GmM_E}{r^2} = m\left(\frac{GM_E}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow 100\Delta\ell = 5(4) \quad \Rightarrow \Delta\ell = 0.2\,\mathrm{m}$$

ג. על פי החוק השני של קפלר, שעל פיו הקו הדימיוני המחבר בין המעבורת ובין כדור הארץ חולף על שטחים שווים בזמנים שווים, נקבל שמהירות המעבורת גדולה יותר ככל שהיא קרובה יותר לכדור הארץ ולהיפך, מהירות המעבורת תהיה קטנה יותר ככל שהיא רחוקה יותר מכדור הארץ. מכיוון שבנקודה A המעבורת רחוקה יותר מכדה"א מאשר בנקודה B, מהירותה בנקודה A תהיה קטנה יותר: $v_A < v_B$.

ד. בכל נקודה לאורך המסלול יש למעבורת תאוצה המכוונת (על פי החוק השני של ניוטון) בכיוון הכוח השקול שפועל עליה. מכיוון שהכוח היחיד שפועל על המעבורת הוא כוח המשיכה של כדור הארץ, אשר נתון על ידי: $F = GmM_E/r^2$ וכיוונו בכיוון מרכז כדור הארץ, נקבל שבכל נקודה יש למעבורת תאוצה המכוונת לכיוון מרכז כדור הארץ, וגודלה:

$$a_r = \frac{GM_E m/r^2}{m} = \frac{GM_E}{r^2}$$

מכיוון ש-$r_B < r_A$, נקבל: $a_B > a_A$.

ה. בשתי הנקודות התארכות הקפיץ היא אפס, וזאת בגלל שתאוצת המעבורת בכל נקודה לאורך המסלול שווה בגודל ובכיוון לתאוצת הנפילה החופשית בנקודות אלה $\left(GM_E/r^2\right)$.

לכן, התאוצה של הגופים בתוך המעבורת ביחס למעבורת היא אפס והם יהיו חסרי משקל בתוכה, ולכן התארכות הקפיץ תהיה אפס.

פתרון שאלה 6\פרק 8

א. רדיוס המסלול של הכוכב הראשון שווה למרחק נקודת מרכז המסה ממנו:

$$R_1 = \frac{dm_2}{m_1 + m_2} = \frac{d(4m)}{m + 4m} = 0.8d$$

$$R_2 = d - R_1 = 0.2d$$

ב. מאחר ושני הכוכבים נשארים במהלך תנועתם על קו ישר אחד שעובר דרך מרכז המסה שלהם, הם משלימים סיבוב שלם באותו זמן, ולכן יש להם אותו זמן מחזור.

ג. נשתמש בחוק השני של ניוטון עבור אחד הכוכבים (למשל כוכב 1) ונקבל:

$$\frac{Gm_1 m_2}{d^2} = m_1\omega^2 R_1$$

$$\Rightarrow \frac{Gm(4m)}{d^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 0.8d$$

$$\Rightarrow T = \pi\sqrt{\frac{0.8d^3}{Gm}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2d^3}{Gm}}$$

לכן נקבל:

$$T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{0.2d^3}{Gm}}$$

ד. נשתמש בקשר $v=\omega r$, כאשר:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=(2\pi)\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Gm}{0.2d^3}}=\sqrt{\frac{Gm}{0.2d^3}}$$

מכאן נקבל:

$$v_1=\omega R_1=\sqrt{\frac{Gm}{0.2d^3}}\times 0.8d=$$
$$=\sqrt{\frac{3.2Gm}{d}}=4\sqrt{\frac{0.2Gm}{d}}$$
$$v_2=\omega R_2=\sqrt{\frac{Gm}{0.2d^3}}\times 0.2d=\sqrt{\frac{0.2Gm}{d}}$$

ה. נניח שמרחק נקודה זו מהכוכב הראשון הוא z, לכן מרחקה מהכוכב השני יהיה $d-z$.

בנקודה זו מתקיים עבור גוף שמסתו m':

$$\frac{Gm'm}{z^2}=\frac{Gm'(4m)}{(d-z)^2}$$
$$\Rightarrow\frac{(d-z)^2}{z^2}=4$$
$$\Rightarrow\frac{d-z}{z}=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

מהקשר האחרון נקבל את שתי המשוואות הבאות:

$$\frac{d-z_1}{z_1}=+2$$
$$\frac{d-z_2}{z_2}=-2$$

מכאן נקבל שני פתרונות. הראשון $z_1=\frac{1}{3}d$ והאחר $z_2=-d$.

נבחר את הפתרון הראשון. בפתרון השני שני הכוחות הפועלים על המסה m' הם אמנם שווים בגודלם, אבל אינם מנוגדים בכיוונם, ולכן אינם מבטלים זה את זה.

פתרון שאלה 7\פרק 8

א. על מנת שהחללית תישאר במנוחה ביחס למרכז הירח, הכוח השקול הפועל עליה צריך להתאפס. לכן קיים צורך בהפעלת מנועי החללית על מנת שיפעל על החללית כוח השווה בגודלו ומנוגד בכיוונו לכוח הכובד המופעל עליה על ידי הירח.

ב. על החללית פועל כוח הכובד המופעל על ידי הירח והמכוון בכיוון מרכז הירח. כוח זה נתון על ידי הקשר:

$$F=\frac{GM_{Moon}m}{r^2}$$

כאשר M_{Moon} היא מסת הירח, m מסת החללית ו- r הוא המרחק ממרכז הירח.

אם לחללית החגה סביב הירח יש מהירות v המקיימת את החוק השני של ניוטון לתנועה מעגלית, כלומר את הקשר הבא:

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{GM_{Moon}m}{r^2}\quad\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_{Moon}}{r}}$$

אז אין צורך להפעיל את מנועי החללית, והחללית תמשיך בתנועתה המעגלית בהשפעת כוח הכובד שמפעיל עליה הירח.

ג. נשתמש בחוק השני של ניוטון עבור התנועה המעגלית של החללית מסביב לירח:

$$\frac{GmM_{Moon}}{r^2}=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$
$$\Rightarrow M_{Moon}=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}$$

נציב:

$$r=1{,}740+600=2{,}340\,\text{km}=2.34\times10^6\ \text{m}$$
$$T=2\tfrac{49.5}{60}\,\text{h}=2.825\,\text{h}=10{,}170\,\text{s}$$

נקבל:

$$\Rightarrow M_{Moon}=\frac{4\pi^2\left(2.34\times10^6\right)^3}{\left(6.67\times10^{-11}\right)(10{,}170)^2}=$$
$$=7.33\times10^{22}\ \text{kg}$$

ד.

(1) כאשר החללית נמצאת במנוחה, משקל

האסטרונאוט שווה לכוח הכובד שמפעיל עליו הירח:

$$W' = \frac{GmM_{Moon}}{r^2}$$

כאשר m היא מסת האסטרונאוט.

לעומת זאת, משקל האסטרונאוט על פני הירח הוא:

$$W = \frac{GmM_{Moon}}{R_{Moon}^2}$$

ולכן יחס המשקלים יהיה:

$$\frac{W'}{W} = \frac{Gm M_{Moon}}{r^2} \cdot \frac{R_{Moon}^2}{Gm M_{Moon}} = \frac{R_{Moon}^2}{r^2} =$$

$$= \left(\frac{R_{Moon}}{r}\right)^2 = \left[\frac{1740\,\text{km}}{(1740+600)\,\text{km}}\right]^2 = 0.55$$

(2) כאשר החללית מסתובבת מסביב לירח במסלול מעגלי בהשפעת כוח הכובד של הירח, האסטרונאוטים בתוכה נמצאים במצב חוסר משקל, ולכן היחס W'/W מתאפס.

פתרון שאלה 8\פרק 8

א. אם נשחרר גוף מגובה מסוים מעל פני כדור הארץ ובמרחק r ממרכז כדור הארץ, הוא ייפול בתאוצת הניתנת, על פי החוק השני של ניוטון, על ידי:

$$g(r) = \frac{F_G}{m} = \frac{GM_E m / r^2}{m} = \frac{GM_E}{r^2}$$

כאשר m היא מסת הגוף, M_E היא מסת כדור הארץ, ו- r הוא המרחק של הגוף ממרכז כדור הארץ.

את הביטוי האחרון ניתן לרשום בדרך הבאה:

$$g(r) = \frac{GM_E}{R_E^2}\left(\frac{R_E^2}{r^2}\right)$$

הגודל GM_E / R_E^2 הוא תאוצת הכובד כאשר $r = R_E$, כלומר על פני כדור הארץ השווה ל- $g_0 = 9.8\,\text{m/s}^2$. לכן נקבל מהביטוי האחרון:

$$g(r) = 9.8\left(\frac{R_E^2}{r^2}\right) = g_0\left(\frac{R_E}{r}\right)^2$$

ב. נציב $r = R_E + h$ בביטוי שהתקבל בסעיף הקודם ונקבל:

$$g(h) = g_0\left(\frac{R_E}{R_E + h}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{g_0}{g(h)} = \left(\frac{R_E + h}{R_E}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{g_0}{g(h)}} = \frac{R_E + h}{R_E} = 1 + \frac{1}{R_E}h$$

ג. מהקשר שהתקבל בסעיף האחרון נובע ששיפוע הגרף מייצג את הגודל $1/R_E$. על מנת לחשב את שיפוע הגרף, נבחר שתי נקודות על קו המגמה, לדוגמה: $(1600\,\text{km}, 1.25)$ ו- $(4{,}800\,\text{km}, 1.75)$.

מתקיים:

$$\frac{1}{R_E} = \frac{1.75 - 1.25}{4{,}800\,\text{km} - 1{,}600\,\text{km}}$$

$$\Rightarrow R_E = 6{,}400\,\text{km}$$

ד. מתקיים:

$$\frac{GM_E}{R_E^2} = g_0$$

$$\Rightarrow M_E = \frac{g_0 R_E^2}{G} =$$

$$= \frac{(9.8)(6.4\times10^6)^2}{6.67\times10^{-11}} = 6\times10^{24}\,\text{kg}$$

פתרון שאלה 9\פרק 8

א. מהחוק השני של ניוטון עבור התנועה המעגלית של הירחים שסביב לכוכב הלכת מתקבל:

$$\frac{GmM}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

כאשר M היא מסת כוכב הלכת, m מסת הירח, r הוא מרחק הירח ממרכז כוכב הלכת ו-T הוא זמן המחזור של הירח. מהקשר האחרון נקבל:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

על פי קשר זה, הגרף המתאר את T^2 כפונקציה של r^3 עבור הירחים של כוכב לכת מסוים הוא קו ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו הוא הגודל $4\pi^2/GM$, כאשר M היא מסת כוכב הלכת.

ב. השיפוע הקטן ביותר שייך לכוכב הלכת שלו המסה הגדולה ביותר, ובמקרה זה צדק (לצדק יש את המסה הגדולה ביותר מבין כוכבי הלכת במערכת השמש).

ג. נסמן את שבתאי ב-S ואת צדק ב-J, ונקבל:

$$\frac{\frac{4\pi^2}{GM_S}}{\frac{4\pi^2}{GM_J}} = \frac{M_J}{M_S} = 3\tfrac{1}{3}$$

ד. על פי הקשר שהתקבל בסעיף א', זמן המחזור הקטן ביותר של לוויין מסביב לכוכב לכת כלשהוא מתקבל עבור ה-r הקטן ביותר האפשרי ללוויין וזה קורה כאשר הלוויין מסתובב בדיוק מעל פני הכוכב (בגובה אפס מפני הקרקע). במקרה זה מתקיים $r = R$, כאשר R הוא רדיוס כוכב הלכת. במקרה זה נקבל:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

מצד שני מתקיים: $M = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$, כאשר ρ היא צפיפות המסה של כוכב הלכת ו-$\frac{4}{3}\pi R^3$ הוא נפח כוכב הלכת.

נציב את M מהמשוואה האחרונה במשוואה עבור T ונקבל:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G\rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

עבור צדק: $\rho = 1.326\,\text{gr/cm}^3 = 1{,}326\,\text{kg/m}^3$

עבור שבתאי:

$$\rho = 0.687\,\text{gr/cm}^3 = 687\,\text{kg/m}^3$$

עבור אורנוס:

$$\rho = 1.29\,\text{gr/cm}^3 = 1{,}290\,\text{kg/m}^3$$

נציב ונקבל עבור צדק:

$$T_{\min} = \sqrt{\frac{3\pi}{(6.67\times10^{-11})(1326)}} = \\ = 10{,}320\,\text{s} = 2.867\,\text{h}$$

עבור שבתאי:

$$T_{\min} = \sqrt{\frac{3\pi}{(6.67\times10^{-11})(687)}} = \\ = 14{,}338\,\text{s} = 3.98\,\text{h}$$

עבור אורנוס:

$$T_{\min} = \sqrt{\frac{3\pi}{(6.67\times10^{-11})(1290)}} = \\ = 10{,}464\,\text{s} = 2.9\,\text{h}$$

פתרון שאלה 10\פרק 8

א. לפי החוק השלישי של קפלר צריך להתקיים עבור שני כוכבי הלכת:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

בבעיה זו $T_1 = T_2$ וזאת בגלל הנתון שהקו המחבר בין שני כוכבי הלכת עובר כל הזמן דרך מרכז הכוכב. לעומת זה $r_1 \neq r_2$, ולכן עבור שני כוכבי הלכת שבבעיה מתקיים:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \neq \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

כלומר החוק השלישי של קפלר אינו מתקיים.

על מנת שחוקי קפלר יתקיימו, כוכבי הלכת הנעים סביב כוכב מרכזי חייבים לנוע בהשפעת כוח מרכזי יחיד – כוח כובד שצורתו $F = GmM/r^2$ והמופעל על ידי הכוכב.

במקרה שקיימים כוחות נוספים שפועלים על כוכבי הלכת, חוקי קפלר אינם מתקיימים. בבעיה זו כוכבי הלכת מפעילים כוחות זה על זה, כוחות שאינם זניחים, ולכן חוקי קפלר אינם מתקיימים בבעיה זו.

ב.

(1) מכיוון שכל אחד משני כוכבי הלכת נע בתנועה מעגלית, הכוח השקול על כל אחד מהם הוא בכיוון מרכז המסלול המעגלי, כלומר בכיוון מרכז הכוכב.

(2) הכוח השקול הפועל על כל אחד משני כוכבי הלכת מקיים את הקשר:

$\Sigma F = m\omega^2 r$

מכיוון שלשני כוכבי הלכת יש אותה מסה m ואותה מהירות זוויתית ω, הכוח השקול הגדול יותר יפעל על כוכב הלכת שלו רדיוס המסלול הגדול יותר, כלומר על כוכב הלכת 1.

ג.

(1) נרשום את החוק השני של ניוטון עבור כל אחד משני כוכבי הלכת. עבור כוכב הלכת 1 מתקיים:

$$(1)\quad \frac{GMm}{d^2} + \frac{Gm^2}{(0.2d)^2} = m\omega^2 d$$

ועבור כוכב הלכת 2 מתקיים:

$$(2)\quad \frac{GMm}{(0.8d)^2} - \frac{Gm^2}{(0.2d)^2} = m\omega^2 (0.8d)$$

אם נכפיל את משוואה 1 ב-0.8 ונשווה עם משוואה 2, נקבל:

$$\frac{1}{0.8}\left[\frac{GMm}{d^2} + \frac{Gm^2}{(0.2d)^2}\right] = \frac{GMm}{(0.8d)^2} - \frac{Gm^2}{(0.2d)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{0.8} + \frac{m}{0.032} = \frac{M}{0.64} - \frac{m}{0.04}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{1}{0.64} - \frac{1}{0.8}\right) = m\left(\frac{1}{0.032} + \frac{1}{0.04}\right)$$

$$\Rightarrow M = 180m$$

(2) נציב $M = 180m$ במשוואה 1 שבתת הסעיף הקודם ונקבל:

$$\frac{G(180m)m}{d^2} + \frac{Gm^2}{(0.2d)^2} = m\omega^2 d$$

$$\Rightarrow 180Gm + 25Gm = \omega^2 d^3$$

$$\Rightarrow 205Gm = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 d^3$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{205Gm}}$$

מאחר וזמן המחזור של שני כוכבי הלכת זהה, נקבל:

$$.T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{205Gm}}$$

ה. במערכת השמש מתקיים:

1. מסות כוכבי הלכת זניחות ביחס למסת השמש (המסה של כל כוכבי הלכת ביחד קטנה פי 1000 בקירוב ממסת השמש).
2. המרחק בין כוכבי הלכת גדול מאוד.

כתוצאה משני גורמים אלה, ההשפעה ההדדית בין כוכבי הלכת זניחה ביחס לכוח שפועל על כוכבי הלכת בהשפעת השמש, ולכן ניתן להתייחס למערכת השמש כאל כוכבי לכת הנעים אך ורק בהשפעת כוח הכובד של השמש. על כן, החוק השלישי של קפלר מתקיים תמיד במערכת זו, אפילו אם קורה ושני כוכבי לכת נמצאים ברגע מסיים על קו אחד שעובר במרכז השמש.

פתרון שאלה 11\פרק 8

א.

(1)

$$F_G = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$=\left(7.35\times10^{22}\right)\left(\frac{2\pi}{27.3\times24\times3600}\right)^2\left(3.84\times10^8\right)=$$

$$=2\times10^{20}\,\text{N}$$

(2)

$$F_G = G\frac{M_{Moon}M_E}{r^2}$$

$$\Rightarrow 2\times10^{20}=\left(6.67\times10^{-11}\right)\frac{\left(7.35\times10^{22}\right)M_E}{\left(3.84\times10^8\right)^2}$$

$$\Rightarrow M_E = 6\times10^{24}\,\text{kg}$$

ב.

(1) מכיוון שהירח והלוויינים סובבים את כדור הארץ בהשפעת כוח הכבידה שלו, מתקיימים עבורם חוקי קפלר. מהחוק השלישי של קפלר נקבל עבור הלוויין הראשון:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3}=\frac{T_{Moon}^2}{r_{Moon}^3}$$

$$T_1 = T_{Moon}\sqrt{\left(\frac{r_1}{r_{Moon}}\right)^3}=$$

$$=27.3\sqrt{\left(\frac{20{,}000\,\text{km}}{3.84\times10^5\,\text{km}}\right)^3}=$$

$$=0.325\text{day}=7.79\text{h}$$

עבור הלוויין השני:

$$T_2 = T_{Moon}\sqrt{\left(\frac{r_2}{r_{Moon}}\right)^3}=$$

$$=27.3\sqrt{\left(\frac{10{,}000\,\text{km}}{3.84\times10^5\,\text{km}}\right)^3}=0.115\text{day}=2.75\text{h}$$

ועבור הלוויין השלישי:

$$T_3 = T_{Moon}\sqrt{\left(\frac{r_3}{r_{Moon}}\right)^3}=$$

$$=27.3\sqrt{\left(\frac{5{,}000\,\text{km}}{3.84\times10^5\,\text{km}}\right)^3}=0.04\text{day}=0.97\text{h}$$

(2) על מנת שהלוויין הרביעי יישאר מעל אותה נקודה מעל קו המשווה, זמן המחזור שלו צריך להיות שווה לזמן המחזור של כדור הארץ בתנועתה הסיבובית סביב צירו, המוגדר כ"יממה". נשתמש בחוק השלישי של קפלר עבור לוויין זה ועבור הירח ונקבל:

$$\frac{T_4^2}{r_4^3}=\frac{T_{Moon}^2}{r_{Moon}^3}$$

$$\Rightarrow r_4 = r_{Moon}\sqrt[3]{\left(\frac{T_4}{T_{Moon}}\right)^2}=$$

$$=384{,}000\,\text{km}\sqrt[3]{\left(\frac{1\,\text{day}}{27.3\,\text{day}}\right)^2}=42{,}353\,\text{km}$$

ג. אם נסמן את מרחק נקודה זו ממרכז כדור הארץ ב-x, אזי מתקיים בנקודה זו:

$$\frac{GM_E m}{x^2}=\frac{GM_{Moon}m}{(d-x)^2}$$

כאשר m היא מסת החללית ו-$d=384{,}000\,\text{km}$ הוא המרחק בין מרכז כדור הארץ ומרכז הירח. ממשוואה זו נקבל:

$$\frac{M_E}{M_{Moon}}=\frac{x^2}{(d-x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{d-x}=\pm\sqrt{\frac{M_E}{M_{Moon}}}=\pm\sqrt{\frac{6\times10^{24}}{7.35\times10^{22}}}=\pm9$$

מהמשוואה האחרונה נקבל את שתי המשוואות הבאות:

$$\frac{x_1}{d-x_1}=9\quad\Rightarrow x_1=0.9d=345{,}600\,\text{km}$$

$$\frac{x_2}{d-x_2}=-9\quad\Rightarrow x_2=(9/8)d=432{,}000\,\text{km}$$

נבחר את $x_1 = 0.9d = 345{,}600\,\text{km}$. הפתרון השני שייך לנקודה הנמצאת על המשך הקו המחבר בין כדור הארץ והירח (מחוץ לקטע הנמצא ביניהם). בנקודה זו שני הכוחות הפועלים על החללית שווים בגודל וגם בכיוונם, ולכן הם אינם מבטלים זה את זה.

פתרון שאלה 12\פרק 8

א. אם נניח שמסת הגשושית היא m, נקבל מהחוק השני של ניוטון עבור תנועתה המעגלית:

$$\frac{GmM_{Mars}}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$
$$\Rightarrow M_{Mars} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

נציב:

$$r = 3400\,\text{km} + 1000\,\text{km} = 4.4\times10^6\,\text{m}$$
$$T = 2\,\text{h} + \tfrac{27}{60}\,\text{h} = 2.45\,\text{h} = 8{,}820\,\text{s}$$

ונקבל:

$$M_{Mars} = \frac{4\pi^2\left(4.4\times10^6\right)^3}{\left(6.67\times10^{-11}\right)\left(8{,}820\right)^2} =$$
$$= 6.48\times10^{23}\,\text{kg}$$

ב. אם נשחרר גוף שמסתו m על פני מאדים הוא ייפול בתאוצה שגודלה:

$$a = \frac{F_G}{m} = \frac{GM_{Mars}m / R^2_{Mars}}{m} = \frac{GM_{Mars}}{R^2_{Mars}} =$$
$$= \frac{6.67\times10^{-11}(6.48\times10^{23})}{(3.4\times10^6)^2} = 3.74\,\text{m/s}^2$$

ג. מהחוק השני של ניוטון עבור התנועה המעגלית של הגשושית נקבל:

$$\frac{GM_{Mars}m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_{Mars}}{r}} = \sqrt{\frac{\left(6.67\times10^{-11}\right)\left(6.48\times10^{23}\right)}{4.4\times10^6}} =$$
$$= 3{,}134\,\text{m/s} = 3.134\,\text{km/s}$$

ד. תאוצת הגשושית כתוצאה מתנועתה המעגלית היא: $a_c = v^2/r$. נציב את המהירות מהסעיף הקודם ונקבל:

$$a_c = \frac{GM_{Mars}}{r^2} =$$
$$= \frac{\left(6.67\times10^{-11}\right)\left(6.48\times10^{23}\right)}{\left(4.4\times10^6\right)^2} = 2.2\,\text{m/s}^2$$

תאוצת הנפילה החופשית במסלול הגשושית היא:

$$g(r) = \frac{GM_{Mars}}{r^2} = 2.2\,\text{m/s}^2$$

רואים שתאוצת הגשושית כתוצאה מתנועתה המעגלית זהה לתאוצת הנפילה החופשית. זאת מאחר והגשושית נופלת בעצם נפילה חופשית בתנועתה המעגלית, משום שהיא נעה תחת השפעת כוח הכבידה של מאדים.

ה. מכיוון שלמתקן יש אותה מהירות ואותה תאוצה צנטריפטלית (שהיא תאוצת הנפילה החופשית) כמו לגשושית בתנועתה המעגלית סביב מאדים, המתקן ימשיך לנוע באותה תנועה כמו תנועת הגשושית, כלומר בתנועה מעגלית. לכן המתקן אינו מתרחק מהגשושית ויישאר צמוד אליה.

פתרון שאלה 13\פרק 8

א. נשתמש בחוק השלישי של קפלר עבור ירחי אורנוס:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \quad \Rightarrow T_2 = T_1\sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3}$$

עבור Miranda נקבל:

$$T_2 = (13.43\,\text{day})\sqrt{\left(\frac{129{,}850}{583{,}420}\right)^3} = 1.41\,\text{day}$$

עבור Ariel נקבל:

$$T_2 = (13.43\,\text{day})\sqrt{\left(\frac{190{,}930}{583{,}420}\right)^3} = 2.51\,\text{day}$$

עבור Titania נקבל:

$$T_2 = (13.43\,\text{day})\sqrt{\left(\frac{436{,}270}{583{,}420}\right)^3} = 8.68\,\text{day}$$

לכן נקבל את הטבלה הבאה:

הירח	רדיוס המסלול (km)	זמן מחזור (day)
Miranda	129,850	1.41
Ariel	190,930	2.51
Titania	436,270	8.68
Oberon	583,420	13.43

ב. על מנת לחשב את מסת אורנוס, נשתמש בחוק השני של ניוטון עבור אחד מירחיו, למשל Miranda, ונקבל:

$$\frac{GM_{Uranus}m_1}{r_1^2} = m\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 r_1$$

$$\Rightarrow M_{Uranus} = \frac{4\pi^2 r_1^3}{GT_1^2} =$$

$$= \frac{4\pi^2(129{,}850{,}000)^3}{(6.673\times10^{-11})(1.41\times24\times3600)^2} =$$

$$= 8.73\times10^{25}\,\text{kg}$$

ג. מהחוק השני של ניוטון עבור הירחים בתנועתם המעגלית נקבל:

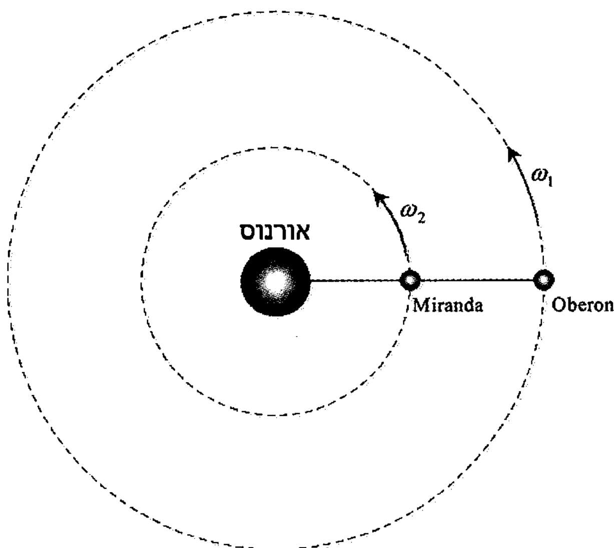
$$\frac{GM_{Uranus}m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_{Uranus}}{r}}$$

על פי קשר זה נקבל שהירח שלו רדיוס המסלול הקטן ביותר, מהירותו הקווית היא הגדולה ביותר, וזהו הירח Miranda, עבורו מתקבל:

$$v = \sqrt{\frac{(6.67\times10^{-11})(8.727\times10^{25})}{129{,}850{,}000}} = 6{,}697\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ד. נסמן את המהירות הזוויתית של Miranda ב- ω_2 ואת המהירות הזוויתית של Oberon ב- ω_1 (ראה תרשים). מתקיים ש- $\omega_2 > \omega_1$ מאחר וזמן המחזור של Miranda קטן מזמן המחזור של Oberon.

המהירות הזוויתית של Miranda ביחס ל- Oberon היא $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$. המשמעות של מהירות זו היא שאילו הירח Oberon היה במנוחה (כלומר אנו נמצאים על הירח Oberon), הירח Miranda היה נע ביחס אלינו במהירות זוויתית ω_{21}. לכן הזמן (t) הדרוש לשני הירחים להיות פעם נוספת על קו ישר שעובר דרך מרכז אורנוס, הוא הזמן הדרוש ל- Miranda להשלים סיבוב שלם $(2\pi\,\text{rad})$ במהירות היחסית ω_{21}:



$$t = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2\pi}{2\pi/T_2 - 2\pi/T_1} =$$

$$= \frac{T_1T_2}{T_1 - T_2} = \frac{(1.41\,\text{day})(13.43\,\text{day})}{13.43\,\text{day} - 1.41\,\text{day}} = 1.58\,\text{day}$$

פתרון שאלה 14\פרק 8

א. תאוצת הנפילה החופשית של גוף הנופל בשדה הכובד של כוכב לכת כלשהו נתונה, על פי החוק השני של ניוטון, על ידי:

$$g(r)=\frac{F_G}{m}=\frac{GMm/r^2}{m}=\frac{GM}{r^2}$$

כאשר M היא מסת כוכב הלכת, m מסת הגוף, ו- r הוא המרחק ממרכז כוכב הלכת.

ב. את הביטוי האחרון ניתן לרשום בצורה הבאה:

$$g(r)=\frac{GM}{R^2}\frac{R^2}{r^2}$$

הגודל GM/R^2 הוא תאוצת הנפילה החופשית כאשר $r=R$, כלומר על פני כוכב הלכת, אותה נסמן ב- g_0. לכן נקבל מהביטוי האחרון:

$$g(r)=g_0\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

ג. צריך להתקיים:

$$g_0\left(\frac{R_E}{r}\right)^2=0.16g_0$$

$$\Rightarrow\frac{R_{Earth}}{r}=0.4$$

$$\Rightarrow r=\frac{R_E}{0.4}=\frac{6,380\,\text{km}}{0.4}=15,950\,\text{km}$$

הגובה h מעל פני הקרקע הוא:

$$h=r-R_E=$$
$$=15,950\,\text{km}-6,380\,\text{km}=9,570\,\text{km}$$

ד. צריך להתקיים:

$$\frac{GM_E}{r^2}=\frac{GM_{Moon}}{R_{Moon}^2}$$

$$\Rightarrow r=R_{Moon}\sqrt{\frac{M_E}{M_{Moon}}}=$$
$$=1,740\,\text{km}\sqrt{81}=15,660\,\text{km}$$

הגובה מעל פני הקרקע הוא:

$$h=r-R_E=$$
$$=15,660\,\text{km}-6,380\,\text{km}=9,280\,\text{km}$$

פתרון שאלה 15\פרק 8

א. לפי החוק השני של ניוטון נקבל עבור כל אחד משני הלוויינים:

$$\frac{GM_{Earth}m}{r^2}=m\frac{v^2}{r}\qquad\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_{Earth}}{r}}$$

לכן נקבל:

$$\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{GM_{Earth}/r_2}{GM_{Earth}/r_1}}=\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$$

ב.

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{2\pi r_2/v_2}{2\pi r_1/v_1}=\frac{r_2}{r_1}\frac{v_1}{v_2}$$

נציב v_1/v_2 מהסעיף הקודם ונקבל:

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{r_2}{r_1}\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2}$$

ג.

$$\frac{\Sigma F_2}{\Sigma F_1}=\frac{GM_{Earth}m_2/r_2^2}{GM_{Earth}m_1/r_1^2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

ד. המהירות הזוויתית ω_1 של לוויין 1 גדולה יותר מהמהירות הזוויתית ω_2 של הלוויין 2. המהירות הזוויתית של לוויין 1 ביחס ללוויין 2 היא:

$$\omega_{12}=2\pi/T_1-2\pi/T_2$$

הזמן הדרוש על מנת ששני הלוויינים יחזרו פעם נוספת להיות על קו אחד העובר דרך מרכז כדור הארץ, הוא הזמן הדרוש ללוויין 1 להשלים סיבוב שלם במהירות הזוויתית היחסית ω_{12}, שהוא:

$$t=\frac{2\pi}{\omega_{12}}=\frac{2\pi}{2\pi/T_1-2\pi/T_2}=\frac{T_1T_2}{T_2-T_1}=$$
$$=\frac{T_1T_2}{T_1(T_2/T_1-1)}=\frac{T_2}{\left[(r_2/r_1)^{3/2}-1\right]}$$

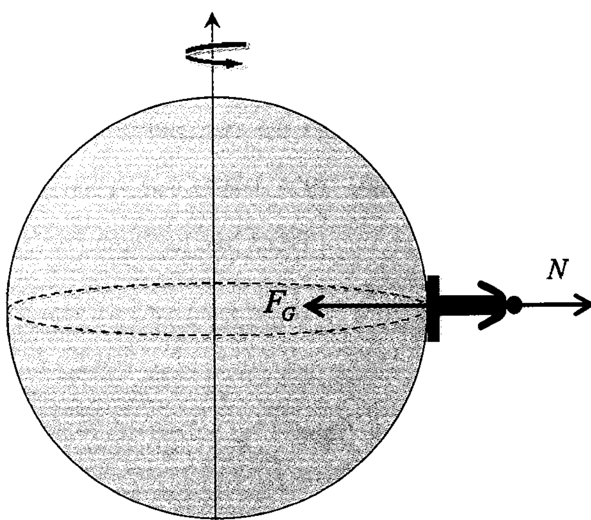
כשהצבנו מסעיף ב': $T_2/T_1=(r_2/r_1)^{3/2}$.

פתרון שאלה 16\פרק 8

א. קו המשווה הוא מעגל דמיוני שמישורו ניצב לציר הסיבוב של כוכב הלכת מסביב לעצמו, מרכזו במרכז כוכב הלכת והיקפו נמצא על פני כוכב הלכת.

לחילופין, הוא הקו הדמיוני הנוצר על פני כוכב הלכת (כדור הארץ) מהחיתוך עם כדור הארץ של המישור הניצב לקו המחבר בין שני הקטבים ואשר מחלק אותו לשני חלקים שווים.

ב. נרשום את הכוחות הפועלים על האסטרונאוט, שהם כוח הכבידה שכוכב הלכת מפעיל עליו, F_G, והכוח הנורמלי N, שניהם מתוארים בתרשים הבא:



קריאת המאזנים שווה לכוח שהאדם מפעיל על המאזניים (שנסמן אותו ב-N'), ולפי החוק השלישי של ניוטון, כוח זה שווה בגודלו לכוח הנורמלי N שהמאזניים מפעילים על האדם.

מהחוק השני של ניוטון לתנועה המעגלית נקבל:

$$F_G - N = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

$$\Rightarrow N = \frac{GmM}{R^2} - m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

$$\Rightarrow N = m\left(\frac{GM}{R^2} - \omega^2 R\right) = m\left(\frac{GM}{R^2} - \frac{2\pi^2 R}{T^2}\right)$$

כאשר $\omega = 2\pi / T$ היא המהירות הזוויתית של כוכב הלכת בתנועתו הסיבובית.

ג. על מנת שהאסטרונאוט יהיה חסר משקל, קריאת המאזניים צריכה להתאפס, כלומר צריך להתקיים:

$$m\left[\frac{GM}{R^2} - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\right] = 0$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM}$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

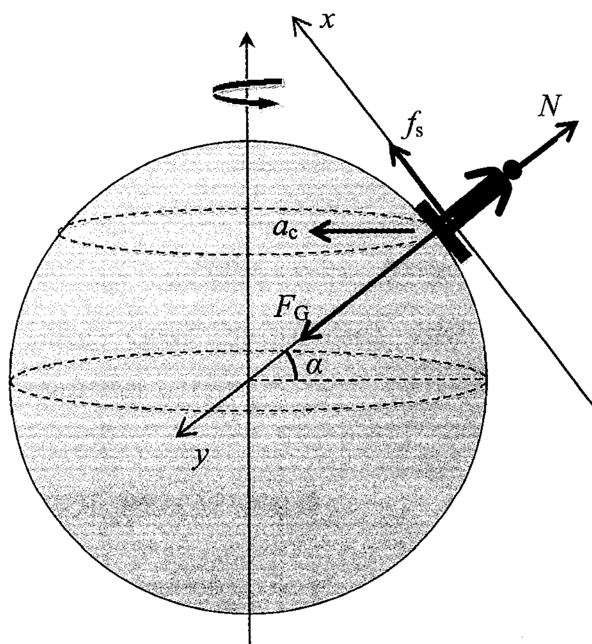
ד.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2}{GM}R}$$

מאחר ו- $g = GM_E / R_E^2 = 9.8\,\text{m/s}^2$ נקבל:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{6.4\times10^6}{9.8}} = 5{,}077\,\text{s} = 1.41\,\text{h}$$

ה. בתרשים הבא ניתן לראות את הכוחות הפועלים על האסטרונאוט, שהפעם איננו ממוקם על קו המשווה:



שים לב! למאזניים יש תאוצה a_c בכיוון מרכז

הסיבוב (ראה תרשים). לתאוצה זו יש רכיב שגודלו $a_c \sin\alpha$ בכיוון המשיק לכדור הארץ ומכוון בכיוון הקוטב (בכיוון ציר x בתרשים). מכאן שעל מנת שהאסטרונאוט יישאר במנוחה ביחס למאזניים, צריך לפעול עליו כוח בכיוון זה, כוח שהוא החיכוך f_s הגורם לו לנוע בתאוצה ביחד עם המאזניים בכיוון האמור (בכיוון ציר x שבתרשים). גודלו של כוח זה הוא:

$$f_s = ma_x = m\left(a_c \sin\alpha\right) =$$

$$= m\omega^2 r \sin\alpha = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(R\cos\alpha\right)\sin\alpha$$

$$\Rightarrow f_s = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}\sin\alpha\cos\alpha$$

בכיוון מרכז כוכב הלכת (בכיוון ציר y שבתרשים) מתקיים:

$$F_G - N = ma_C\cos\alpha = m\left(\omega^2 R\cos\alpha\right)\cos\alpha$$

$$\Rightarrow N = m\frac{GM}{R^2} - m\omega^2 R\cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow N = mg - m\omega^2 R\cos^2\alpha$$

N היא קריאת המאזניים כאשר:

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\omega = 2\pi / T$$

ו. מתקיים $N = mg$ כאשר:

$$m\omega^2 R\cos^2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \alpha = \pm 90^\circ$$

כלומר כאשר האסטרונאוט עומד בקטבים, הצפוני או הדרומי.

פתרון שאלה 17\פרק 8

א.

n	r(AU)
0	0.7
1	1
2	1.6
3	2.8
4	5.2
5	10
6	19.6

ב.

כוכב הלכת	המרחק המשמש (AU)	n
נוגה	0.72	0
כדור הארץ	1.00	1
מאדים	1.52	2
		3
צדק	5.2	4
שבתאי	9.54	5
אורנוס	19.2	6

ג. כוכב הלכת החסר הוא עבור $n=3$, שעבורו מתקיים: $r = 2.8\,\text{AU}$.

ד. נוכל לחשב את זמן המחזור של האסטרואיד אם נציב את נתוניו ולצד נתוני כדה"א בביטוי לחוק השלישי של קפלר:

$$\frac{T_{Ceres}^2}{r_{Ceres}^3} = \frac{T_{Earth}^2}{r_{Earth}^3}$$

$$\Rightarrow T_{Ceres} = T_{Earth}\sqrt{\left(\frac{r_{Ceres}}{r_{Earth}}\right)^3} =$$

$$= 1\,\text{yr}\sqrt{\left(\frac{2.8\,\text{AU}}{1\,\text{AU}}\right)^3} = 4.68\,\text{yrs}$$

פתרון שאלה 18\פרק 8

א. נציב בביטוי של החוק השלישי של קפלר את הנתונים של אסטרואיד ושל כדה"א:

$$\frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{T_{Earth}^2}{r_{Earth}^3}$$

$$\Rightarrow T_2 = T_{Earth}\sqrt{\left(\frac{r_2}{r_{Earth}}\right)^3}$$

(1) עבור האסטרואידים במסלול הקרוב לשמש

נקבל:

$$T = 1\,\text{yr}\sqrt{\left(\frac{3\times10^8}{1.5\times10^8}\right)^3} = 2.83\,\text{yrs}$$

(2) עבור האסטרואידים במסלול הרחוק מהשמש נקבל:

$$T = 1\,\text{yr}\sqrt{\left(\frac{5\times10^8}{1.5\times10^8}\right)^3} = 6.09\,\text{yrs}$$

ב. אם המסלולים של האסטרואידים היו מסלולים מעגליים שנמצאים במישור אחד ושמרכזם בשמש, אין סיכוי שהם יתנגשו זה בזה כי:

(1) מסלולים מעגליים קונצנטריים (כלומר בעלי מרכז משותף), ובמקרה זה מעגלים שמרכזם בשמש, ואשר נמצאים באותו מישור אינם נחתכים.

(2) לכל האסטרואידים הנעים באותו מסלול מעגלי יש את אותה מהירות, ולכן הם לא יכולים להתנגש עם האסטרואידים האחרים במסלולם.

אבל בגלל שחלק מהאסטרואידים עשויים לנוע במסלולים אליפטיים, או במסלולים מעגליים שאינם נמצאים במישור אחד, ומסלולים אלה יכולים לחתוך זה את זה, ולכן קיים בכל זאת סיכוי שהאסטרואידים יתנגשו זה בזה.

ג. כוח המשיכה של השמש הוא:

$$F_1 = \frac{GM_{\odot}m}{r^2} =$$

$$= \frac{\left(6.67\times10^{-11}\right)\left(2\times10^{30}\right)\left(0.6\times10^{21}\,\text{kg}\right)}{\left(5\times10^{11}\right)^2} =$$

$$= 3.2\times10^{17}\,\text{N}$$

כוח המשיכה הגדול ביותר בו צדק מושך האסטרואיד מתקבל כאשר האסטרואיד נמצא במרחק הקטן ביותר מצדק, שהוא:

$$\Delta r = 7.78\times10^{11} - 5\times10^{11} = 2.78\times10^{11}\,\text{m}$$

ולכן במקרה זה כוח המשיכה הוא:

$$F_2 = \frac{GM_{Jupiter}m}{r^2} =$$

$$= \frac{\left(6.67\times10^{-11}\right)\left(1{,}899\times10^{24}\right)\left(0.6\times10^{21}\,\text{kg}\right)}{\left(2.78\times10^{11}\right)^2}$$

$$= 9.83\times10^{14}\,\text{N}$$

מכאן נקבל:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{9.83\times10^{14}\,\text{N}}{3.2\times10^{17}\,\text{N}} = 3\times10^{-3}$$

ד. מהסעיף הקודם מתקבל שכוח המשיכה הגדול ביותר של צדק זניח יחסית לכוח המשיכה של השמש, לכן ניתן להניח בקירוב טוב שחוקי קפלר מתקיימים עבור האסטרואיד שבשאלה זו.

פתרון שאלה 19\פרק 8

א.

$$\frac{T^2_{Demos}}{r^3_{Demos}} = \frac{T^2_{Phobos}}{r^3_{Phobos}}$$

$$\Rightarrow r_{Demos} = r_{Phobos}\sqrt[3]{\left(\frac{T_{Demos}}{T_{Phobos}}\right)^2} =$$

$$= 9300\,\text{km}\sqrt[3]{\left(\frac{30}{7.5}\right)^2} = 23{,}434\,\text{km}$$

ב. נשתמש בחוק השני של ניוטון עבור התנועה המעגלית של אחד הירחים, למשל פובוס, ונקבל:

$$\frac{GM_{Mars}m}{r^2_{Phobos}} = m\left(\frac{2\pi}{T_{Phobos}}\right)^2 r_{Phobos}$$

$$\Rightarrow M_{Mars} = \frac{4\pi^2 r^3_{Phobos}}{GT^2_{Phobos}} =$$

$$= \frac{4\pi^2\left(9.3\times10^6\right)^3}{\left(6.67\times10^{-11}\right)\left(7.5\times3600\right)^2} = 6.52\times10^{23}\,\text{kg}$$

ג.

$$g=\frac{GM_{Mars}}{R_{Mars}^2}=$$

$$=\frac{6.67\times10^{-11}(6.52\times10^{23})}{(3.4\times10^6)^2}=3.76\,\text{m/s}^2$$

ד. נשתמש בחוק השלישי של קפלר עבור לוויין זה ואחד מירחי מאדים, למשל פובוס:

$$\frac{T^2}{r^3}=\frac{T_{Phobos}^2}{r_{Phobos}^3}$$

$$\Rightarrow r=r_{Phobos}\sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_{Phobos}}\right)^2}=$$

$$=9300\,\text{km}\sqrt[3]{\left(\frac{24}{7.5}\right)^2}=20{,}195\,\text{km}$$

ה. נחשב את זמן המחזור של הלוויין החדש, וזאת על ידי שימוש בחוק השלישי של קפלר בין הלוויין החדש והקודם, ונקבל:

$$\frac{T_2^2}{r_2^3}=\frac{T_1^2}{r_1^3}$$

$$\Rightarrow T_2=T_1\sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3}=24\sqrt{\left(\frac{0.25r_1}{r_1}\right)^3}=3\text{h}$$

המהירות הזוויתית של לוויין זה ביחס לנקודה קבועה על פני מאדים היא:

$$\omega'=\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{2\pi}{24}\right)$$

שים לב! הלוויין חג בכיוון המנוגד לכיוון סיבוב מאדים סביב צירו.

הזמן הדרוש ללוויין לחזור מעל לאותה נקודה על פני מאדים הוא הזמן הדרוש לו להשלים סיבוב שלם $(2\pi\,\text{rad})$ במהירות הזוויתית היחסית ω':

$$t=\frac{2\pi}{2\pi/3+2\pi/24}=2\tfrac{2}{3}\text{h}$$

פתרון שאלה 20\פרק 8

א. נשתמש בחוק השני של ניוטון עבור הלוויין בתנועתו המעגלית:

$$\frac{GmM}{r^2}=m\frac{v^2}{r}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

ב. מתקיים: $E_K=\frac{1}{2}mv^2$. נציב את v מהסעיף הקודם ונקבל:

$$E_K=\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right)^2=\frac{GmM}{2r}$$

ג. מכיוון שמתקיים: $U_G=-\frac{GMm}{r}$, נקבל מהביטוי לאנרגיה הקינטית של הלוויין שהתקבל בסעיף הקודם:

$$E_K=-\tfrac{1}{2}\left(-\frac{GMm}{r}\right)=-\tfrac{1}{2}U_G$$

ד. האנרגיה הכללית של הלוויין היא: $E=E_K+U_G$. נציב את E_K מהסעיף הקודם ונקבל

$$E=-\tfrac{1}{2}U_G+U_G=\tfrac{1}{2}U_G=-\frac{GMm}{2r}$$

ה. המשמעות של האנרגיה הכוללת של הלוויין היא שכמות האנרגיה המינימלית שחסרה ללוויין במסלולו על מנת שישתחרר מכוח המשיכה של כוכב הלכת, ולהגיע למרחק אינסופי מכוכב הלכת היא $GMm/2r$. במילים אחרות, על מנת לשחרר את הלוויין מכוח המשיכה של כוכב הלכת יש לספק לו אנרגיה מינימלית בשיעור $GMm/2r$.

פתרון שאלה 21\פרק 8

א. מהירות הלוויין לפני ההתנגשות מתקבלת מהשימוש בחוק השני של ניוטון בתנועה המעגלית:

$$\frac{GmM_E}{r_1^2}=m\frac{v_1^2}{r_1}\Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{GM_E}{r_1}}$$

על מנת לחשב את המהירות המשותפת של הלוויין והאסטרואיד אחרי ההתנגשות, נשתמש בחוק שימור התנע:

$$(m+m)u = mv_1 + mv_2$$

$$\Rightarrow (m+m)u = m\sqrt{\frac{GM_E}{r_1}} + 1.8m\sqrt{\frac{GM_E}{r_1}}$$

$$\Rightarrow u = 1.4\sqrt{\frac{GM_E}{r_1}}$$

ב. האנרגיה הכוללת של הלוויין והאסטרואיד אחרי ההתנגשות היא:

$$E_1 = E_K + U_G = \tfrac{1}{2}(2m)u^2 - \frac{GM_E(2m)}{r_1} =$$

$$= \tfrac{1}{2}(2m)\left(1.4\sqrt{\frac{GM_E}{r_1}}\right)^2 - \frac{GM_E(2m)}{r_1} =$$

$$= -0.04\frac{GmM_E}{r_1}$$

על פי עקרון שימור האנרגיה, האנרגיה הכוללת של הלוויין והאסטרואיד במסלול החדש שהיא $E_2 = -GM_E(2m)/2r_2$ (ראה בעיה 20 סעיף ד'), צריכה להיות שווה ל-E_1.

מכאן נקבל:

$$-\frac{2GmM_E}{2r_2} = -0.04\frac{GmM_E}{r_1}$$

$$\Rightarrow r_2 = 25r_1$$

ג. על פי הסעיף הקודם (שימור האנרגיה), מתקיים:

$$\tfrac{1}{2}(2m)u^2 - \frac{2GmM_E}{r_1} = -\frac{2GmM_E}{2r_2}$$

על מנת שהלוויין והאסטרואיד יתנתקו מכדור הארץ אחרי ההתנגשות, צריך להתקיים $r_2 = \infty$. המהירות u המקיימת תנאי זה היא:

$$\tfrac{1}{2}(2m)u^2 - \frac{2GmM_E}{r_1} = -\frac{2GmM_E}{\infty}$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{\frac{2GM_E}{r_1}}$$

על מנת לחשב במקרה זה את מהירות האסטרואיד לפני ההתנגשות, ניעזר בחוק שימור התנע:

$$mv_1 + mv_2 = (m+m)u$$

$$\Rightarrow m\sqrt{\frac{GM_E}{r_1}} + mv_2 = 2m\sqrt{\frac{2GM_E}{r_1}}$$

$$\Rightarrow v_2 = 2\sqrt{\frac{2GM_E}{r_1}} - \sqrt{\frac{GM_E}{r_1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{GM_E}{r_1}}\left(2\sqrt{2}-1\right) =$$

$$\Rightarrow v_2 = 1.83\sqrt{\frac{GM_E}{r_1}}$$

על מנת שהלוויין והאסטרואיד לא יתנתקו מכוח הכבידה של כדור הארץ לאחר ההתנגשות, מהירות האסטרואיד לפני ההתנגשות צריכה לקיים את התנאי:

$$v < 1.83\sqrt{\frac{GM_E}{r_1}}$$

ד.

(א) עכשיו נקבל:

$$(m+m)u = mv_1 + mv_2$$

$$\Rightarrow (m+m)u = m\sqrt{\frac{GM_E}{r_1}} - 1.8m\sqrt{\frac{GM_E}{r_1}}$$

$$\Rightarrow u = -0.4\sqrt{\frac{GM_E}{r_1}}$$

כלומר מהירות הלוויין ביחד על האסטרואיד, מיד אחרי ההתנגשות, היא $0.4v_1$ בכיוון הנגדי כי קיבלנו מהירות שלילית.

(ב) נרשום את חוק שימור האנרגיה עבור הלוויין:

$$\tfrac{1}{2}(2m)u^2 - \frac{2GmM_E}{r_1} = -\frac{2GmM_E}{2r_2}$$

נציב את u מהסעיף הקודם ונקבל:

$$\tfrac{1}{2}(2m)\left(-0.4\sqrt{\frac{GM_E}{r_1}}\right)^2-\frac{2GmM_E}{r_1}=-\frac{2GmM_E}{2r_2}$$

$$\Rightarrow 0.08\frac{GM_E}{r_1}-\frac{GM_E}{r_1}=-\frac{GM_E}{2r_2}$$

$$\Rightarrow \frac{-0.92}{r_1}=-\frac{1}{2r_2}\quad\Rightarrow r_2=0.54r_1$$

פתרון שאלה 22\פרק 8

א. על פי שימור האנרגיה צריך להתקיים:

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2-\frac{GmM_E}{R_E}=-\frac{GmM_E}{2r_2}$$

$$\Rightarrow \frac{2GM_E}{R_E}-v_1^2=\frac{GM_E}{r_2}$$

$$\Rightarrow r_2=\frac{GM_E}{2GM_E/R_E-v_1^2}=\frac{1}{\frac{2}{R_E}-\frac{v_1^2}{GM_E}}=$$

$$\Rightarrow r_2=\frac{1}{\frac{2}{6.38\times10^6}-\frac{\left(9\times10^3\right)^2}{\left(6.673\times10^{-11}\right)\left(6\times10^{24}\right)}}=$$

$$=8{,}995{,}085\,\text{m}\approx8{,}995\,\text{km}$$

ב. אם נקנה לפגז מהירות u במסלולו, הוא יעבור למסלול חדש, שרדיוסו r_2; מתקבל מחוק שימור האנרגיה:

$$\tfrac{1}{2}mu^2-\frac{GmM_E}{r_1}=-\frac{GmM_E}{2r_2}$$

הערך המינימלי עבור u על מנת שהפגז ישתחרר משדה הכבידה של כדור הארץ, הוא זה שמתקיים עבורו $r_2=\infty$. לכן נקבל:

$$\tfrac{1}{2}mu_{\min}^2-\frac{GmM_E}{r_1}=-\frac{GmM_E}{\infty}=0$$

$$\Rightarrow u_{\min}=\sqrt{\frac{2GM_E}{r_1}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2(6.673\times10^{-11})(6\times10^{24})}{8.995\times10^6}}=9{,}435\,\text{m/s}$$

ג. נחשב קודם את מהירות הפגז במסלולו, וזאת על פי הקשר:

$$v_1=\sqrt{\frac{GM_E}{r_1}}=\sqrt{\frac{(6.673\times10^{-11})(6\times10^{24})}{8.995\times10^6}}=$$

$$=6{,}672\,\text{m/s}$$

(1) אם התוספת Δv למהירות v_1 היא בכיוון המהירות v_1, צריך להתקיים:

$$v_1+\Delta v=u_{\min}$$

$$\Rightarrow \Delta v=u_{\min}-v=9{,}435-6{,}672=2{,}763\,\text{m/s}$$

(2) אם התוספת Δv למהירות v_1 היא בכיוון ניצב למהירות, צריך להתקיים:

$$\sqrt{v_1^2+(\Delta v)^2}=u_{\min}^2$$

$$\Rightarrow \Delta v=\sqrt{u_{\min}^2-v_1^2}=$$

$$=\sqrt{9{,}435^2-6{,}672^2}=6{,}671\,\text{m/s}$$

ד. נשתמש בחוק שימור האנרגיה, כאשר בגובה המקסימלי: $v_2=0$

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2-\frac{GmM_E}{r_1}=\tfrac{1}{2}mv_2^2-\frac{GmM_E}{r_2}$$

$$\tfrac{1}{2}v_1^2-\frac{GM_E}{R_E}=0-\frac{GM_E}{r_{\max}}$$

$$\Rightarrow r_{\max}=\frac{GM_E}{\frac{GM_E}{R_E}-\frac{1}{2}v_1^2}=\frac{1}{\frac{1}{R_E}-\frac{v_1^2}{2GM_E}}=$$

$$=\frac{1}{\left[\frac{1}{6.38\times10^6}-\frac{(9{,}000)^2}{2\left(6.673\times10^{-11}\right)\left(6\times10^{24}\right)}\right]}$$

$$\Rightarrow r_{\max}=17{,}990{,}171\,\text{m}\approx17{,}990\,\text{km}$$

מכאן הגובה המקסימלי מעל פני הקרקע הוא:

$$h_{\max}=r_{\max}-R_E=(17{,}990-6{,}380)\,\text{km}=$$
$$=11{,}610\,\text{km}$$

ה. נשתמש בחוק שימור האנרגיה:

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2-\frac{GmM_E}{r_1}=\tfrac{1}{2}mv_2^2-\frac{GmM_E}{r_2}$$

כאשר:

$v_1=v_{es}$, $v_2=0$ $r_2=\infty$ ו- $r_1=R_E$. נציב

ונקבל:

$$\tfrac{1}{2}v_{es}^2-\frac{GM_E}{R_E}=0-\frac{GM_E}{\infty}=0$$

$$\Rightarrow v_{es}=\sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2\left(6.673\times10^{-11}\right)\left(6\times10^{24}\right)}{6.38\times10^{6}}}=$$

$$=11{,}203\,\text{m/s}\approx11.2\,\text{km/s}$$

פתרון שאלה 23\פרק 8

א. מהירות המעבורת ברגע שחרור הלוויין שווה למהירות המתאימה לתנועת הלוויין בתנועה מעגלית מסביב לכדור הארץ בהשפעת כוח הכבידה שלה. לקבלת מהירות זו נשתמש בחוק השני של ניוטון עבור התנועה המעגלית של הלוויין:

$$\frac{GmM_E}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_E}{r}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(6.673\times10^{-11}\right)\left(6\times10^{24}\right)}{10^{7}}}=6{,}327\,\text{m/s}$$

ב. על הלוויין בתנועתו מפני כדור הארץ למסלולו פועלים שני כוחות: כוח הכבידה F_G וכוח הדחף של החללית F. לפי משפט עבודה אנרגיה מתקיים:

$$W_F(1\to2)+W_{F_G}(1\to2)=\tfrac{1}{2}mv_2^2-\tfrac{1}{2}mv_1^2$$

כאשר W_F היא העבודה של מעבורת החלל ו- W_G היא עבודת כוח הכבידה. מתקיים:

$$W_{F_G}(1\to2)=U_{G1}-U_{G2}=$$

$$=\left(-\frac{GmM_E}{R_E}\right)-\left(-\frac{GmM_E}{r_2}\right)=$$

$$=\frac{GmM_E}{r_2}-\frac{GmM_E}{R_E}$$

נציב W_{F_G} מהביטוי האחרון וגם $v_1=0$ במשפט עבודה אנרגיה ונקבל:

$$W_F(1\to2)+\frac{GmM_E}{r_2}-\frac{GmM_E}{R_E}=\tfrac{1}{2}mv_2^2$$

$$\Rightarrow W_F(1\to2)=\left(\tfrac{1}{2}mv_2^2-\frac{GmM_E}{r_2}\right)-\left(-\frac{GmM_E}{R_E}\right)$$

מתקיים:

$$\tfrac{1}{2}mv_2^2-\frac{GmM_E}{r_2}=-\frac{GmM_E}{2r_2}$$

לכן נקבל:

$$W_F(1\to2)=\left(-\frac{GmM_E}{2r_2}\right)-\left(-\frac{GmM_E}{R_E}\right)=$$

$$=GmM_E\left(\frac{1}{R_E}-\frac{1}{2r_2}\right)=$$

$$=GM_Em\left(\frac{1}{6.38\times10^{6}}-\frac{1}{2\times10^{7}}\right)=$$

$$=4.273\times10^{10}\,\text{J}$$

כאשר הצבנו:

$$G=6.67\times10^{-11}\,\text{N}\,\text{m}^2/\text{kg}^2$$
$$M_E=6\times10^{24}\,\text{kg}$$
$$m=1000\,\text{kg}$$

ג. שוב לפי משפט עבודה אנרגיה קינטית נקבל:

$$W_F(1\to2)+W_{F_G}(1\to2)=\tfrac{1}{2}mv_2^2-\tfrac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Rightarrow W_F(1\to2)+\frac{GmM_E}{r_2}-\frac{GmM_E}{r_1}=$$

$$=\tfrac{1}{2}mv_2^2-\tfrac{1}{2}mv_1^2$$

$$\begin{cases}\Rightarrow W_F(1\to2)=\\ =\left(\tfrac{1}{2}mv_2^2-\frac{GmM_E}{r_2}\right)-\left(\tfrac{1}{2}mv_1^2-\frac{GmM_E}{r_1}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow W_F(1\to2)=\left(-\frac{GmM_E}{2r_2}\right)-\left(-\frac{GmM_E}{2r_1}\right)=$$

$$=\frac{GM_Em}{2}\left(\frac{1}{10^{7}}-\frac{1}{1.5\times10^{7}}\right)=$$

$$=6.673\times10^{9}\,\text{J}$$

שים לב! בעצם מה שקיבלנו הוא:

$$W_F(1\to 2)=E_{T2}-E_{T1}$$

כאשר:

$$E_{T2}=-\frac{GmM_E}{2r_2}$$

היא האנרגיה הכוללת של הלוויין במסלול 2 ו:

$$E_{T1}=-\frac{GmM_E}{2r_1}$$

היא האנרגיה הכוללת של הלוויין במסלול 1.

מכאן:

$$W_F(1\to 2)=\left(-\frac{GmM_E}{2r_2}\right)-\left(-\frac{GmM_E}{R_E}\right)=$$

$$=\frac{GM_Em}{2}\left(\frac{1}{10^7}-\frac{1}{1.5\times10^7}\right)=$$

$$=6.673\times10^9\ \text{J}$$

ד.

$$E=\tfrac{1}{2}mv_2^2-\frac{GmM_E}{r_2}=-\frac{GmM_E}{2r_2}$$

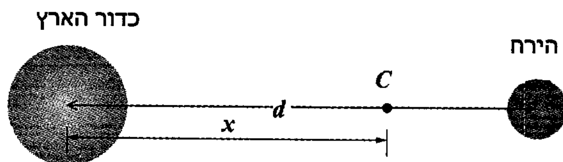
$$=-\frac{6.673\times10^{-11}\left(6\times10^{24}\right)\left(10^3\right)}{2\left(1.5\times10^7\right)}=$$

$$=-1.3346\times10^{10}\ \text{J}$$

ה. העבודה המינימלית שיש להשקיע על מנת לשחרר את הלוויין משדה הכבידה של כדור הארץ כשהוא במסלולו החדש שווה לאנרגיה המינימלית החסרה ללוויין להשתחרר ממסלולו. על פי הסעיף הקודם, האנרגיה המינימלית החסרה ללוויין על מנת להשתחרר ממסלולו היא 1.3346×10^{10} J. מכאן $W_F=1.3346\times10^{10}$ J.

פתרון שאלה 24\פרק 8

א. נסמן את המרחק בין מרכז כדור הארץ ומרכז הירח ב-d ואת מרחק הנקודה C ממרכז כדור הארץ ב-x, כפי שמתואר בתרשים הבא:



מכיוון שסכום הכוחות על גוף שמסתו m ונמצא בנקודה C מתאפס, נקבל:

$$\frac{GM_Em}{x^2}=\frac{GM_Mm}{(d-x)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{(d-x)^2}=\frac{M_E}{M_M}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{d-x}=\pm\sqrt{\frac{M_E}{M_M}}=\pm\sqrt{\frac{6\times10^{24}}{7.35\times10^{22}}}=\pm9$$

לכן קיימים שני פתרונות. הפתרון הראשון הוא:

$$\frac{x_1}{d-x_1}=+9\ \Rightarrow x_1=0.9d=345{,}600\,\text{km}$$

הפתרון השני הוא:

$$\frac{x_2}{d-x_2}=-9\ \Rightarrow x_2=1\tfrac{1}{8}d=432{,}000\,\text{km}$$

הפתרון השני (x_2) מתייחס לנקודה הנמצאת בתרשים הנ"ל מימין לירח. בנקודה זו שני הכוחות הפועלים על הגוף על ידי כדור הארץ ועל ידי הירח שווים בגודלם ויש להם אותו כיוון. לכן שני כוחות אלה אינם מבטלים זה את זה בנקודה x_2.

לכן הפתרון הוא $x_1=345{,}600\,\text{km}$.

ב. המהירות המינימלית עבור הפגז על מנת שיגיע לפני הירח היא המהירות שעבורה הפגז מגיע לנקודה C במהירות אפס. כי אחרי

$$u_1^2-\frac{2GM_E}{r_1}=-\frac{GM_E}{r_2}$$

$$\Rightarrow r_2=\frac{GM_E}{\frac{2GM_E}{r_1}-u_1^2}=\frac{1}{\frac{2}{r_1}-\frac{u_1^2}{GM_E}}=$$

$$=\frac{1}{\frac{2}{1.18\times10^7}-\frac{(4,720)^2}{GM_E}}=$$

$$=8,783,612\,\text{m}\cong 8,784\,\text{km}$$

פתרון בגרות מכניקה 2009

פתרון שאלה 2009\1

א. נבחר את הכיוון החיובי של ציר y כלפי מעלה ואת $y=0$ על פני הקרקע ונבטא את המיקום כפונקציה של הזמן עבור כל אחד משני הכדורים:

$$y_A = y_{0A} + v_{0A}t + \tfrac{1}{2}at^2 = 45 + 40t - 5t^2$$
$$y_B = y_{0B} + v_{0B}t + \tfrac{1}{2}at^2 = 55t - 5t^2$$

הכדורים נפגשים כאשר $y_A = y_B$:

$$55t - 5t^2 = 45 + 40t - 5t^2$$
$$\Rightarrow 15t = 45$$
$$\Rightarrow t = 3\text{s}$$

מיקום המפגש (הגובה מעל פני הקרקע) הוא:

$$h = y_A(3) = y_B(3) = 55\times 3 - 5(9) = 120\text{m}$$

ב. מתקיים:

$$v_A = 40 - 10t$$
$$v_B = 55 - 10t$$

שוויון וקטורי המהירות גורר שוויון הגודל והכיוון (הסימן) של המהירויות. לכן יש לבדוק אם מתקיים רגע שבו $v_A = v_B$.

$$v_A = v_B$$
$$\Leftrightarrow 40 - 10t = 55 - 10t$$

רואים שאין פתרון לשוויון זה, לכן אין רגע שבו וקטורי המהירות של שני הכדורים שווים.

ג. על מנת לקבוע מתי הגודל של המהירויות משתווה צריך לבדוק מתי מתקיים:

$$|v_A| = |v_B|$$
$$\Rightarrow |40 - 10t| = |55 - 10t|$$

שוויון זה מתקיים אם:

$$40 - 10t = +(55 - 10t)$$

או

$$40 - 10t = -(55 - 10t)$$

למשוואה הראשונה אין פתרון, למשוואה השנייה יש פתרון והוא:

$$40 - 10t = -(55 - 10t)$$
$$20t = 95$$
$$\Rightarrow t = 4.75\text{s}$$

ברגע זה גודל המהירות של שני הכדורים זהה והוא:

$$|v_A| = |v_B| = 7.5\text{m/s}$$

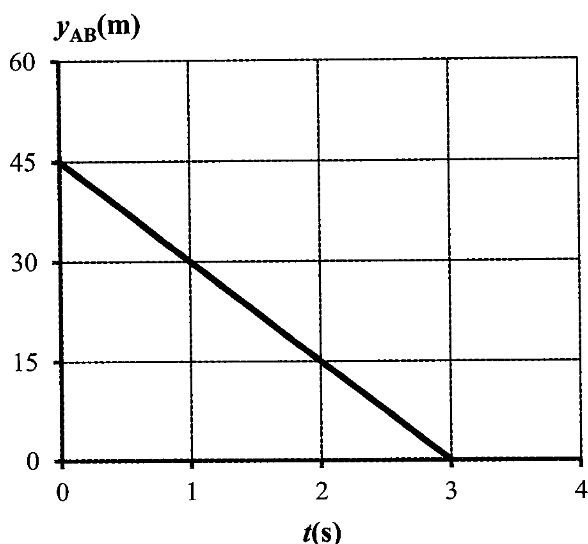
ד. $a_{AB} = a_A - a_B = (-10) - (-10) = 0$

ה. $v_{AB} = v_A - v_B = (40) - (55) = -15\text{m/s}$

ו. מיקום הכדור A ביחס לכדור B (y_{AB}) נתון על ידי:

$$y_{AB} = y_A - y_B =$$
$$= 45 + 40t - 5t^2 - (55t - 5t^2)$$
$$\Rightarrow y_{AB} = 45 - 15t$$

הגרף שמתאר את y_{AB} כפונקציה של הזמן הוא הגרף הבא:



שים לב! הגודל (-15) במשוואה עבור y_{AB} מבטא את מהירות הכדור A יחסית לכדור B, ולכן מתאר את הקצב שבו קטן המרחק בין שני הכדורים.